ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

JULES TANNERY,
Sous-Directeur des Études scientifiques
à l'École Normale supérieure

JULES MOLK,
Professeur à la Faculté des Sciences
de Nancy

TOME II.

CALCUL DIFFÉRENTIEL (IIe PARTIE).

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55

1896

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II

CALCUL DIFFÉRENTIEL

(2e PARTIE)

CHAPITRE III

Les fonctions $\mathfrak{S}$

CHAPITRE IV

Les quotients des fonctions σ et des fonctions $\mathfrak{S}$

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

ERRATA DU TOME PREMIER.

Page 110, ligne 17, *au lieu de* $(-1)^k \cos\lambda k\pi$, *lire* $2(-1)^k \cos\lambda k\pi$

Page 114, ligne 5, *au lieu de* $-\cot 2x_2$ *lire* $-2\cot 2x$

Page 142, ligne 21, *au lieu de* $f(u)$, *lire* $f(u_0)$

Page 164, lignes 17 et 19, multiplier les seconds membres par le facteur σu

Page 164, ligne 25, *au lieu de* n_3, *lire* n

Page 167, ligne 24, *au lieu de* $e^{\eta_1(u+c)}$, *lire* $e^{2\eta_1(u+c)}$.

Page 183, ligne 14, *au lieu de* $e^{\frac{\pi u}{\omega_1}\cot\pi n\frac{\omega_3}{\omega_1}}$, *lire* $e^{\frac{\pi u}{2\omega_1}\cot\pi n\frac{\omega_3}{\omega_1}}$

Page 186, ligne 14, *au lieu de* $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, *lire* $\frac{\omega_3}{\omega_1 i}$

Page 188, ligne 25, *au lieu de* $\frac{\sigma_{10}(u)}{\sigma_{10}(u)}$, *lire* $\frac{\sigma_{10}(u)}{\sigma_{10}(0)}$.

Page 201, ligne 14, *au lieu de* réel et positif, *lire* reel

Page 201, ligne 16, *au lieu de* réel et négatif, *lire* réel.

Page 204, *au lieu de l'avant-dernière ligne du texte, lire* est nul ou si le facteur $\sigma(2a)$ est nul, ceci ne peut avoir lieu que si b est un multiple de $\frac{\omega_3}{i}$ ou si a est un multiple de ω_1, et,

Page 22 , dernière ligne, *ajouter sous le signe* $\prod'$ *l'indice* s

Page 225, dernière ligne, *au lieu de* $\frac{\omega_1}{}$, *lire* $\frac{\omega_1}{n}$.

Le lecteur qui voudrait se borner à un aperçu de la Théorie des fonctions elliptiques et acquérir seulement les notions indispensables aux applications des fonctions elliptiques à la Mecanique pourra se dispenser de lire les numéros 176 *à* 271 *et les numeros* 320 *a* 350

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

(2e PARTIE)

CHAPITRE III.

LES FONCTIONS ϑ

I. — Développements des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$

151. Les fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ de M. Weierstrass, que nous avons étudiées particulièrement jusqu'ici, offrent, en raison de leur symétrie, un grand intérêt et une grande utilité; mais cette symétrie même laisse confondues des propriétés que l'emploi d'autres éléments analytiques permet seul de démêler.

Ces nouveaux éléments analytiques ont été introduits dans la Science par Jacobi leur découverte est assurément un de ses plus beaux titres de gloire (1) Ils peuvent être, comme on le

(1) *Voir* Lejeune-Dirichlet, *Gedächtnissrede auf Jacobi* (*Œuvres de Jacobi*, t I, p 14)

verra bientôt, étudiés directement sur leur définition, leur étude peut aussi être rattachée à celle des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ Ils se présentent naturellement quand on développe ces dernières fonctions en série, sous une forme que nous allons faire connaître (¹)

Dans ces développements en série, comme dans les fonctions de Jacobi, les deux périodes ne jouent plus le même rôle. Nous ferons désormais la supposition suivante, qui est essentielle :

Le coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ est positif.

Cela revient à admettre que l'angle formé par les deux directions, qui vont du point o aux deux points $2\omega_1$, $2\omega_3$ du parallélogramme des périodes, a la disposition directe

D'autre part, nous ne considérerons plus que des couples $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$ *proprement* équivalents au couple primitif $(2\omega_1, 2\omega_3)$ de sorte que le coefficient de i dans le rapport $\frac{\Omega_3}{\Omega_1}$ sera aussi positif et q faudra toujours prendre le signe supérieur + dans les formules (X_0) et (XX_3); ainsi l'on aura toujours

$$(\text{XXVII}) \quad \begin{cases} \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = +\dfrac{\pi i}{2}, \\ \text{H}_1\Omega_3 - \text{H}_3\Omega_1 = +\dfrac{\pi i}{2}. \end{cases}$$

1. Nous allons d'abord écrire sous une autre forme la formule (X_1) qui donne l'expression en produit infini, à simple entrée, de la fonction σ, ainsi que les formules analogues $(XVII_{3-5})$, relatives aux fonctions σ_1, σ_2, σ_3.

Nous emploierons les notations suivantes (²)

$$(\text{XXVIII}_2) \quad \begin{cases} v = \dfrac{u}{2\omega_1}, & z = e^{v\pi i}, \\ \tau = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}, & q = e^{\tau\pi i}, \end{cases}$$

(¹) C'est la marche suivie par M Weierstrass dans ses cours professés à l'Université de Berlin, c'est aussi celle de M Schwarz dans les *Formeln und Lehrsätze*

(²) M Hermite a souvent employé le symbole ω pour représenter le rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, c'est aussi la notation adoptée par M Weber (*Elliptische Functionen und*

en vertu desquelles on a immédiatement, par la formule d'Euler $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, les égalités

$$\sin\pi\frac{2n\omega_3 - u}{2\omega_1} = \frac{q^n z^{-1} - q^{-n} z}{2i},$$

$$\sin\pi\frac{2n\omega_3 + u}{2\omega_1} = \frac{q^n z - q^{-n} z^{-1}}{2i},$$

$$\sin\pi\frac{n\omega_3}{\omega_1} \qquad = \frac{q^n - q^{-n}}{2i},$$

et, par suite,

$$\frac{\sin\pi\dfrac{2n\omega_3 - u}{2\omega_1}\sin\pi\dfrac{2n\omega_3 + u}{2\omega_1}}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}} = \frac{(1 - q^{2n}z^{-2})(1 - q^{2n}z^2)}{(1 - q^{2n})^2}$$

D'ailleurs, à cause de la supposition du numéro précédent, *la valeur absolue de q est inférieure à un,* d'où il résulte que les produits

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n}z^{-2}), \qquad \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n}z^2), \qquad \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n}),$$

sont absolument convergents. La formule (X_1)

$$\sigma u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\frac{2\omega_1}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1 - \frac{\sin^2\pi\dfrac{u}{2\omega_1}}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\right]$$

et la suivante, qui lui est équivalente,

$$\sigma u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\frac{2\omega_1}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\pi\dfrac{2n\omega_3 - u}{2\omega_1}\sin\pi\dfrac{2n\omega_3 + u}{2\omega_1}}{\sin^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}$$

---

algebraische Zahlen) M Weierstrass et M Schwarz (*Formeln und Lehrsatze*) désignent par h l'exponentielle $e^{\tau\pi i}$, de même ils désignent par H_0, H_1, H_2, H_3 les fonctions de q que nous désignerons (n° 154) par q_0, q_1, q_2, q_3 Dans beaucoup des formules qui suivent, c'est q^2 qui figure seul, aussi a-t-on souvent employé une lettre pour désigner q^2, M Klein emploie la lettre r, M Hermite s'est quelquefois servi, dans ce même sens, de la lettre Q, que nous employons avec une signification tout autre

peuvent donc s'écrire

$$(\text{XXIX}_1)\quad \sigma u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{2\omega_1}{\pi}\,\frac{z - z^{-1}}{2i}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 - q^{2n}z^{-2}}{1 - q^{2n}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 - q^{2n}z^{2}}{1 - q^{2n}},$$

ou encore, si l'on tient compte de la relation

$$(1 - q^{2n}z^{-2})(1 - q^{2n}z^{2}) = 1 - 2q^{2n}\cos 2v\pi + q^{4n},$$

$$(\text{XXIX}_1)\quad \sigma u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{2\omega_1}{\pi}\sin v\pi\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 - 2q^{2n}\cos 2v\pi + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2}.$$

De même les trois formules (XVII_{3-5}) relatives à $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ peuvent s'écrire chacune des deux manières suivantes

$$(\text{XXIX}_2)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma_1 u &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{z + z^{-1}}{2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 + q^{2n}z^{-2}}{1 + q^{2n}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 + q^{2n}z^{2}}{1 + q^{2n}} \\ &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\cos v\pi\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 + 2q^{2n}\cos 2v\pi + q^{4n}}{(1 + q^{2n})^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(\text{XXIX}_3)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma_2 u &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 + q^{2n-1}z^{-2}}{1 + q^{2n-1}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 + q^{2n-1}z^{2}}{1 + q^{2n-1}} \\ &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 + 2q^{2n-1}\cos 2v\pi + q^{4n-2}}{(1 + q^{2n-1})^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(\text{XXIX}_4)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma_3 u &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 - q^{2n-1}z^{-2}}{1 - q^{2n-1}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 - q^{2n-1}z^{2}}{1 - q^{2n-1}} \\ &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1 - 2q^{2n-1}\cos 2v\pi + q^{4n-2}}{(1 - q^{2n-1})^2}. \end{aligned}\right.$$

153. En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres des égalités précédentes, on obtient pour ζu, $\zeta_1 u$, $\zeta_2 u$, $\zeta_3 u$ des expressions intéressantes que nous laissons au lecteur le soin d'écrire; les séries que l'on trouve ainsi permettent d'obtenir, pour ces fonctions, d'importants développements en séries trigonométriques; c'est un sujet que nous reprendrons plus tard.

Signalons toutefois, en passant, la forme que prennent les for-

mules ($XVII_2$) avec les notations actuelles, à savoir

$$(XXX)\quad \begin{cases} (1)\quad 2\eta_1\omega_1 = -2e_1\omega_1^2 + \pi^2\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right], \\ (2)\quad 2\eta_1\omega_1 = -2e_2\omega_1^2 + \pi^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}, \\ (3)\quad 2\eta_1\omega_1 = -2e_3\omega_1^2 - \pi^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}. \end{cases}$$

Joignons à ces formules celle-ci :

$$(XXX_4)\qquad 2\eta_1\omega_1 = \pi^2\left[\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right],$$

qui n'est autre chose que la relation (X_4) écrite avec le nouveau système de notations En ajoutant les trois premières égalités, en se rappelant que $e_1 + e_2 + e_3$ est nul, et en comparant le résultat à la dernière égalité, on trouve la relation linéaire qui suit, entre les quatre séries qui figurent aux seconds membres des formules (XXX_{1-4}),

$$(XXX_5)\quad 3\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}.$$

154. Revenons maintenant aux égalités (XXIX) du n° 152 dont les conséquences et les transformations font l'objet principal de ce paragraphe

Tout d'abord, nous remplacerons, dans ces formules, u successivement par ω_1, ω_2, ω_3 de manière à avoir les développements en produits infinis de $\sigma\omega_\alpha$, $\sigma_\beta\omega_\alpha$

Remplacer u par ω_1, ω_2, ω_3 revient à remplacer v par $\frac{1}{2}$, $-\frac{1+\tau}{2}$, $\frac{\tau}{2}$ et z par

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = i,\qquad e^{-(1+\tau)\frac{\pi i}{2}} = -iq^{-\frac{1}{2}},\qquad e^{\frac{\tau\pi i}{2}} = q^{\frac{1}{2}}.$$

On observera que, en vertu de ces égalités même, les notations $q^{\frac{1}{2}}$, $q^{-\frac{1}{2}}$, que nous remplacerons à l'occasion par $\sqrt{q}$, $\frac{1}{\sqrt{q}}$

ne comportent aucune ambiguïté. Nous serons aussi amenés à écrire $\sqrt[n]{i^m}$, $i^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[n]{q^m}$, $q^{\frac{m}{n}}$, m désignant un entier quelconque et n un entier positif quelconque, et nous entendrons par là

$$(\text{XXVIII}_3)\qquad \begin{cases} \sqrt[n]{i^m} = i^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m\pi i}{2n}}, \\ \sqrt[n]{q^m} = q^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m\tau\pi i}{n}}, \end{cases}$$

de sorte que les symboles $\sqrt[n]{i^m}$, $i^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[n]{q^m}$, $q^{\frac{m}{n}}$ ne comporteront jamais aucune ambiguïté; nous disons cela une fois pour toutes

Comme les produits infinis qui figurent aux dénominateurs des formules (XXIX_{1-4}) s'introduisent dans un grand nombre de formules, nous poserons aussi, pour abréger,

$$(\text{XXVIII}_4)\qquad \begin{cases} q_0 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n}), & q_1 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + q^{2n}), \\ q_2 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + q^{2n-1}), & q_3 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n-1}) \end{cases}$$

Les quantités q_0, q_1, q_2, q_3 sont liées par une relation algébrique qu'on obtient immédiatement en remarquant que les produits infinis

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^n), \quad \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + q^n)$$

étant absolument convergents, on peut écrire

$$q_0 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^n)\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + q^n),$$

puis, en groupant dans chaque produit infini partiel les facteurs pour lesquels n est pair, d'une part, et ceux pour lesquels n est impair, de l'autre,

$$q_0 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n-1})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + q^{2n})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + q^{2n-1}) = q_0 q_3 q_1 q_2,$$

d'où

(XXVIII$_6$) $$q_1 q_2 q_3 = 1$$

155. Si nous mettons ω_1, ω_2, ω_3 à la place de u dans le facteur $e^{2\eta_1\omega_1 v^2}$ qui figure partout dans les formules (XXIX), nous trouverons respectivement

$$e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}, \quad e^{\frac{\eta_1\omega_2^2}{2\omega_1}}, \quad e^{\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}}.$$

Les deux dernières quantités se transforment comme il suit l'égalité

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = -\frac{\pi i}{2}$$

montre que l'on a

$$\frac{\eta_1\omega_2^2}{\omega_1} - \eta_2\omega_2 = -\frac{\pi i\omega_2}{2\omega_1} = \frac{\pi i(1+\tau)}{2},$$

on aura donc

$$e^{\frac{\eta_1\omega_2^2}{2\omega_1}} = e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}} e^{\frac{\pi i\tau}{4}} = e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}}\sqrt{i}\,q^{\frac{1}{4}},$$

on trouve de même

$$e^{\frac{\eta_1\omega_3^2}{2\omega_1}} = e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}} q^{\frac{1}{4}}.$$

Dès lors le calcul des diverses quantités $\sigma\omega_\alpha$, $\sigma_\beta\omega_\alpha$ ne présente aucune difficulté. En remplaçant, par exemple, dans la formule (XXIX$_2$), u par ω_2, z par $\frac{-i}{\sqrt{q}}$, z^2 par $\frac{-1}{q}$, on trouve de suite

$$\sigma_1\omega_2 = e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}}\sqrt{i}\,q^{\frac{1}{4}}\,\frac{-iq^{-\frac{1}{2}} + iq^{\frac{1}{2}}}{2q_1^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n-1})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n+1}).$$

En observant que l'on a

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n+1}) = \frac{q_3}{(1-q)},$$

on obtient donc l'égalité

$$\sigma_1\omega_2 = -e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}}\,i\sqrt{i}\,\frac{q_3^2}{2q_1^2 q^{\frac{1}{4}}}.$$

Le calcul se fait de la même façon pour les autres quantités et l'on trouve finalement les résultats qui figurent dans le Tableau suivant, dont la disposition s'explique d'elle-même

(XXXI$_1$)

	ω_1	ω_2	ω_3
σ	$e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\frac{2\omega_1}{\pi}\frac{q_1^2}{q_0^2}$	$-e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}}\sqrt{i}\,\frac{2\omega_1}{\pi}\frac{q_2^2}{2q_0^2q^{\frac{1}{4}}}$	$e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}}\,i\,\frac{2\omega_1}{\pi}\frac{q_3^2}{2q_0^2q^{\frac{1}{4}}}$
σ_1	o	$-e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}}\,i\sqrt{i}\,\frac{q_3^2}{2q_1^2q^{\frac{1}{4}}}$	$e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}}\frac{q_2^2}{2q_1^2q^{\frac{1}{4}}}$
σ_2	$e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\frac{q_3^2}{q_2^2}$	o	$e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}}\,2\frac{q_1^2q^{\frac{1}{4}}}{q_2^2}$
σ_3	$e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\frac{q_2^2}{q_3^2}$	$e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}}\,2\sqrt{i}\,\frac{q_1^2q^{\frac{1}{4}}}{q_3^2}$	o

156 Ces résultats et la formule (XI$_6$)

$$\sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha\omega_\beta}{\sigma\omega_\beta},$$

nous permettent d'exprimer au moyen de ω_1, q, q_0, q_1, q_2, q_3 les six radicaux $\sqrt{e_\beta - e_\alpha}$; on trouve immédiatement, après des réductions qui reposent seulement sur la formule $q_1 q_2 q_3 = 1$, les expressions suivantes

$$(\text{XXXI}_2)\qquad \begin{cases} \sqrt{e_2 - e_3} = -\dfrac{\pi}{2\omega_1}\,4q_0^2q_1^4q^{\frac{1}{2}} \\[2mm] \sqrt{e_1 - e_3} = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\,q_0^2q_2^4, \\[2mm] \sqrt{e_1 - e_2} = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\,q_0^2q_3^4 \end{cases}$$

Le calcul des autres radicaux et les formules (XIII$_4$) fournissent une vérification.

Ces expressions mettent bien en évidence ce fait, établi au n° 119, que les trois quantités $\sqrt{e_2 - e_3}$, $\sqrt{e_1 - e_3}$, $\sqrt{e_1 - e_2}$ sont des fonctions homogènes et du degré -1 des demi-périodes ω_1, ω_3

Les expressions de $e_2 - e_3$, $e_1 - e_3$, $e_1 - e_2$ au moyen de q, q_0, q_1, q_2, q_3 nous fournissent une seconde relation algébrique entre ces dernières quantités, à savoir

$$(\text{XXVIII}_6) \qquad 16 q q_1^8 = q_2^8 - q_3^8,$$

c'est en effet la conséquence immédiate de l'identité

$$(e_2 - e_3) = (e_1 - e_3) - (e_1 - e_2)$$

157 Nous définirons sans ambiguïté les racines quatrièmes des différences $e_2 - e_3$, $e_1 - e_3$, $e_1 - e_2$ et la racine huitième du discriminant $\mathcal{G}$ de l'équation

$$4X^3 - g_2 X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3) = 0,$$

en posant

$$(\text{XXXI}_3) \qquad \begin{cases} \sqrt[4]{e_2 - e_3} = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\, 2 q_0 q_1^2 q^{\frac{1}{4}}, \\ \sqrt[4]{e_1 - e_3} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0 q_2^2, \\ \sqrt[4]{e_1 - e_2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0 q_3^2, \end{cases}$$

$$(\text{XXXI}_4) \qquad \sqrt[8]{\mathcal{G}} = \sqrt[4]{e_2 - e_3}\,\sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2} = i\,\frac{\pi}{2\omega_1}\sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\, 2 q_0^3 q^{\frac{1}{4}}$$

Dans toutes ces formules la signification de $\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}$ est la même, elle peut d'ailleurs être fixée arbitrairement

158 Les produits infinis qui dans les expressions (XXIX) obtenues pour σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ figurent au numérateur sont susceptibles d'être développés en séries convergentes, d'une forme très simple, entières en q ou en $q^{\frac{1}{4}}$ (¹).

(¹) Le procédé de passage à la limite que l'on trouvera ci-dessous pour déduire la fonction ϑ de la fonction σ a été développé par M Biehler, qui en a

Considérons d'abord le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}[(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})],$$

qui figure dans l'expression de $\sigma_2 u$ et posons pour un instant

$$\begin{aligned}\varphi(z) = {} & (1+qz^2)\ (1+q^3z^2)\ \ldots (1+q^{2n-1}z^2)\\ & \times(1+qz^{-2})(1+q^3z^{-2})\ \ldots (1+q^{2n-1}z^{-2})\end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut écrire

$$\varphi(z) = a_0 + a_1(z^2+z^{-2}) + \ldots + a_k(z^{2k}+z^{-2k}) + \ldots + a_n(z^{2n}+z^{-2n}),$$

$a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ étant des fonctions entières de q.

D'ailleurs la définition de $\varphi(z)$ montre que l'on a

$$\begin{aligned}\varphi(qz) = {} & \qquad (1+q^3z^2)(1+q^5z^2)\ \ldots (1+q^{2n+1}z^2)\\ & \times\frac{1}{qz^2}(1+qz^2)\ (1+qz^{-2}) \ldots (1+q^{2n-3}z^{-2}),\end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(qz)(qz^2+q^{2n}) = \varphi(z)(1+q^{2n+1}z^2)$$

En remplaçant, dans cette identité, $\varphi(z)$ et $\varphi(qz)$ par

$$a_0 + a_1(z^2+z^{-2}) + \ldots + a_n(z^{2n}+z^{-2n})$$

et

$$a_0 + a_1(q^2z^2+q^{-2}z^{-2}) + \ldots + a_n(q^{2n}z^{2n}+q^{-2n}z^{-2n}),$$

puis en égalant dans les deux membres les coefficients de z^{-2k+2}, il vient

$$a_k q^{-2k+1} + a_{k-1}q^{-2k+2+2n} = a_{k-1} + a_k q^{2n+1}$$

ou

$$a_k = a_{k-1}\frac{q^{2k-1}(1-q^{2n-2k+2})}{1-q^{2n+2k}}.$$

---

donné diverses applications intéressantes en envisageant les transcendantes considérées comme des limites de fonctions algébriques (*Journal de Crelle*, t 88, p 185) Le principe en est d'ailleurs dû à Cauchy (*Comptes rendus*, 1845)

Observons encore que M Schellbach dans l'Ouvrage intitulé *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen* (Berlin, 1864) a pris les produits infinis comme point de départ de la théorie des fonctions Thêta Jacobi, lui-même, avait signalé les avantages de cette marche

En remplaçant successivement k par $k-1$, $k-2$, ..., 1, et en multipliant membre à membre les égalités ainsi obtenues, on aura

$$a_k = a_0 q^{k^2} \frac{(1-q^{2n-2k+2})(1-q^{2n-2k+4}) \dots (1-q^{2n})}{(1-q^{2n+2k})(1-q^{2n+2k-2}) \dots (1-q^{2n+2})}.$$

D'ailleurs, sur la définition de $\varphi(z)$, on voit que l'on a

$$a_n = q^{n^2};$$

par suite,

$$1 = a_0 \frac{(1-q^2)(1-q^4) \dots (1-q^{2n})}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4}) \dots (1-q^{4n})}.$$

En remplaçant a_0, dans l'expression obtenue pour a_k, par la valeur que fournit cette dernière égalité, il vient

$$a_k = \frac{q^{k^2}}{(1-q^2)(1-q^4) \dots (1-q^{2n})} \frac{(1-q^{2n-2k+2}) \dots (1-q^{4n})}{(1-q^{2n+2}) \dots (1-q^{2n+2k})},$$

ou encore

$$a_k = a'_k \frac{q^{k^2}}{(1-q^2)(1-q^4) \dots (1-q^{2n})},$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} a'_k = \ & (1-q^{2n-2k+2})(1-q^{2n-2k+4}) \dots (1-q^{2n}) \\ & \times (1-q^{2n+2k+2})(1-q^{2n+2k+4}) \dots (1-q^{4n}) \end{aligned}$$

Il est d'ailleurs manifeste que, quand n grandit indéfiniment, a'_k a pour limite l'unité, à cause de la convergence du produit infini

$$\prod_{m=1}^{m=\infty} (1-q^{2m}).$$

On voit aussi que tous les nombres a'_k restent, en valeur absolue, inférieurs à un nombre positif fixe a', indépendant de n, par exemple au produit infini convergent dont le $m^{\text{ième}}$ facteur serait $1+|q^{2m}|$.

Ceci posé, considérons l'expression

$$F_n(z) = (1-q^2)(1-q^4) \dots (1-q^{2n})\,\varphi(z),$$

on a, d'après ce qui précède, l'égalité

$$F_n(z) = 1 + a'_1 q(z^2+z^{-2}) + \dots + a'_k q^{k^2}(z^{2k}+z^{-2k}) + \dots + a_n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}),$$

et l'on voit sans peine que, si l'on fait croître n indéfiniment, $F_n(z)$ a pour limite la somme de la série

$$F(z) = 1 + q(z^2 + z^{-2}) + \ldots + q^{k^2}(z^{2k} + z^{-2k}) + \ldots + q^{n^2}(z^{2n} + z^{-2n}) + \ldots$$

Que cette série soit absolument convergente, c'est ce qui résulte de ce que la série

$$q z^2 + \ldots + q^{k^2} z^{2k} + \ldots + q^{n^2} z^{2n} + \ldots$$

est elle-même absolument convergente, ainsi que celle qu'on en déduit en changeant z en $\frac{1}{z}$: en effet, $\sqrt[n]{|q^{n^2} z^{2n}|} = |q^n z^2|$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Regardons maintenant q et z comme des nombres donnés : il est clair que l'on a

$$|a'_k q^{k^2}(z^{2k} + z^{-2k})| < a' |q^{2k}(z^{2k} + z^{-2k})|,$$

par conséquent, dans le développement de $F_n(z)$, la valeur absolue de la somme des termes qui suivent le terme de rang k est inférieure à la somme, multipliée par a', des valeurs absolues des termes qui, dans la série $F(z)$, suivent aussi le terme de rang k, or, en prenant k suffisamment grand, on peut supposer cette dernière somme moindre qu'un nombre positif arbitraire ε. D'un autre côté, k étant ainsi fixé, puisque, lorsque n augmente indéfiniment, $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{k-1}$ ont pour limite l'unité, on peut prendre n assez grand pour que la différence entre la somme des k premiers termes de $F(z)$ et la somme des k premiers termes de $F_n(z)$ soit moindre en valeur absolue que ε, on aura, dans ces conditions,

$$|F(z) - F_n(z)| < 3\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $F_n(z)$ a pour limite $F(z)$, quand n grandit indéfiniment

Observons en passant que, si l'on désigne par A un nombre positif quelconque, on reconnaît immédiatement, sur la forme même de la série dont la somme est $F(z)$, que cette série est absolument et *uniformément* convergente pour l'ensemble des valeurs de z qui vérifient les conditions

$$\frac{1}{A} \leqq |z| \leqq A$$

En effet, on voit, sous le bénéfice de ces conditions, que les valeurs absolues des termes de la série $F(z)$ sont inférieures ou égales aux termes, tous positifs, de la série

$$1 + 2\,|q|\,A^2 + \quad + 2\,|q^{n^2}|\,A^{2n} + \quad ,$$

série dont la convergence résulte des remarques précédentes. Il suffit dès lors, pour établir la proposition énoncée, d'appliquer le théorème du n° 24.

159. Nous avons établi l'identité

$$q_0 \prod_{n=1}^{n=\infty} [(1 + q^{2n-1} z^2)(1 + q^{2n-1} z^{-2})] = \sum_n q^{n^2} z^{2n}$$

et, par suite $(XXIX_3)$, l'égalité

$$\sigma_2 u = e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \frac{1}{q_0 q^{\frac{2}{2}}} \sum_n q^{n^2} e^{2n v \pi i},$$

nous obtiendrons des identités analogues pour les autres fonctions σu en changeant u en $u + \omega_1$, $u - \omega_2$, $u + \omega_3$, ce qui revient à changer v en $v + \frac{1}{2}$, $v + \frac{1+\tau}{2}$, $v + \frac{\tau}{2}$.

Par exemple, si l'on change u en $u - \omega_2$, et si l'on tient compte de la formule (XII_3)

$$\sigma_2(u - \omega_2) = e^{\eta_2(\omega_2 - u)} \frac{\sigma u}{\sigma \omega_2},$$

on obtient l'égalité

$$\sigma u = e^{\Psi} \frac{\sigma \omega_2}{q_0 q^{\frac{2}{2}}} \sum_n (-1)^n q^{n^2+n} e^{2n\pi v i},$$

en posant, pour abréger,

$$\Psi = 2\eta_1 \omega_1 v^2 + 2(\eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2) v + \frac{\eta_1 \omega_2^2}{2\omega_1} - \eta_2 \omega_2.$$

Si l'on se reporte d'ailleurs aux valeurs de $\sigma\omega_2$, $e^{\frac{\eta_1 \omega_2^2}{2\omega_1}}$ qui ont été établies au n° 155, si l'on se rappelle que $\eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2$ est égal à $\frac{\pi i}{2}$, on trouve

$$e^{\Psi} = e^{2\eta_1 \omega_1 v^2 + \pi i v - \frac{\eta_2 \omega_2}{2}} \sqrt{i}\, q^{\frac{1}{4}},$$

on a donc

$$\sigma u = -i\,\frac{2\,\omega_1}{\pi}\,e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,\frac{1}{2\,q_0^3\,q^{\frac{1}{4}}}\sum_n (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)v\pi i}.$$

On obtiendra de même, en changeant u en $u+\omega_3$ dans l'expression de $\sigma_2 u$, l'égalité

$$\sigma_1 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,\frac{1}{2\,q_0\,q_1^2\,q^{\frac{1}{4}}}\sum_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)v\pi i},$$

et, en changeant dans la même expression u en $u+\omega_1$,

$$\sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\,\frac{1}{q_0\,q_3^2}\sum_n (-1)^n q^{n^2} e^{2nv\pi i}.$$

II. — Relations entre les fonctions σ et les fonctions ϑ

160. Les développements des fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ auxquels nous venons de parvenir nous amènent à introduire quatre nouvelles fonctions de la variable $v = \dfrac{u}{2\,\omega_1}$ Nous poserons [1]

$$\vartheta_1(v) = \frac{1}{i}\sum_n (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)v\pi i},$$

$$\vartheta_2(v) = \sum_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)v\pi i},$$

$$\vartheta_3(v) = \sum_n q^{n^2} e^{2nv\pi i},$$

$$\vartheta_4(v) = \sum_n (-1)^n q^{n^2} e^{2nv\pi i}.$$

On reconnaît directement, sur la forme même des séries qui figurent dans les seconds membres, que ces séries, regardées comme

---

[1] Les notations relatives aux fonctions ϑ sont celles que Jacobi a introduites pour la première fois dans un cours professé en 1835-1836 à l'Université de Kœnigsberg et qu'il a ensuite employées plutôt que celles des *Fundamenta* dont nous parlerons plus loin Il ne met toutefois pas d'indice là où nous mettons l'indice 4 et il écrit $\vartheta_\alpha(v\pi)$ là où nous écrivons $\vartheta_\alpha(v)$ (WERKE, t. I, p 501) M. Weier-

dépendant de la variable v, sont absolument et uniformément convergentes dans toute région limitée du plan où l'on figure cette variable. En effet, un raisonnement tout semblable à celui de la fin du n° 158 montre que la série qui définit la fonction $\mathfrak{S}_3(v)$ de la variable v est absolument et uniformément convergente pour l'ensemble des valeurs de v qui vérifient les conditions

$$|e^{v\pi i}| \leqq \text{A}, \qquad |e^{-v\pi i}| \leqq \text{A},$$

où A est un nombre positif fixe quelconque, et l'on reconnaît

---

strass, M Schwarz, Halphen mettent l'indice o là où nous mettons l'indice 4, la variable est la même que dans notre texte

M Hermite a employé la notation condensée

$$\theta_{\alpha,\beta}(v) = \sum_n (-1)^{\beta n} e^{\tau i\pi\left[\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2\frac{v}{\tau}\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)\right]},$$

où α, β sont des entiers quelconques, les fonctions θ_{11}, θ_{10}, θ_{00}, θ_{01} de M Hermite sont donc nos fonctions $i\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ On a d'ailleurs

$$\theta_{\alpha+2,\beta}(v) = (-1)^\beta\theta_{\alpha,\beta}(v),$$
$$\theta_{\alpha,\beta+2}(v) = \theta_{\alpha,\beta}(v),$$
$$\theta_{\alpha,\beta}\left(v + \frac{p\tau+q}{2}\right) = \theta_{\alpha+p,\beta+q}(v)e^{-i\pi\left(pv+\frac{p^2\tau}{4}-\frac{\alpha q}{2}\right)},$$

p, q étant des entiers quelconques Cette dernière formule, à elle seule, contient les vingt-quatre formules (XXXIV_{3-8}) que nous écrivons plus loin explicitement, on voit assez, par ce seul exemple, les avantages que cette notation peut présenter dans bien des cas Ajoutons que les zéros de $\theta_{\alpha,\beta}(v)$ sont congrus à $\frac{\beta-1}{2} + \frac{\alpha-1}{2}\tau$, *modulis* 1, τ

Les notations de Briot et Bouquet (*Theorie des fonctions elliptiques*) se rattachent à celles que nous avons adoptées en posant

$$\omega = 2\omega_1, \qquad \omega' = 2\omega_3, \qquad x = \omega v,$$

$$\theta_1(x) = \mathfrak{S}_1(v) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{\omega},$$

$$\theta_2(x) = \mathfrak{S}_2(v) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{\omega},$$

$$\theta_3(x) = \mathfrak{S}_3(v) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{\omega},$$

$$\theta\ (x) = \mathfrak{S}_4(v) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{\omega}.$$

immédiatement que ces conditions reviennent à dire que, dans v, le coefficient de i doit être moindre en valeur absolue qu'un nombre positif fixe, d'ailleurs arbitraire On pourrait faire le même raisonnement sur les autres séries, mais la façon dont on passe de l'une aux autres permet de s'en dispenser Ainsi les fonctions $\mathfrak{S}$ sont des fonctions transcendantes entières en v, et les séries qui les définissent peuvent être différentiées, terme à terme, par rapport à v. On reconnaît de même que ces séries peuvent être différentiées, terme à terme, par rapport à q ou par rapport à τ.

161. En groupant ensemble les termes pour lesquels les exposants de e sont égaux et de signes contraires, et en tenant compte des formules d'Euler (n° 66), on peut écrire

$$
\text{(XXXII)}\quad
\begin{cases}
(1)\quad \mathfrak{S}_1(v) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n 2q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\pi v, \\
(2)\quad \mathfrak{S}_2(v) = \sum_{n=0}^{n=\infty} 2q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)\pi v, \\
(3)\quad \mathfrak{S}_3(v) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} 2q^{n^2} \cos 2n\pi v, \\
(4)\quad \mathfrak{S}_4(v) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n 2q^{n^2} \cos 2n\pi v,
\end{cases}
$$

ou encore d'une façon plus explicite

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1(v) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \ldots, \\
\mathfrak{S}_2(v) &= 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \ldots, \\
\mathfrak{S}_3(v) &= 1 + 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^9 \cos 6\pi v + \ldots, \\
\mathfrak{S}_4(v) &= 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \ldots
\end{aligned}
$$

Quand on voudra mettre en évidence, soit le rapport $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$, à l'aide duquel les quatre fonctions $\mathfrak{S}$ sont formées, soit le nombre $q = e^{\tau\pi i}$, on écrira

$$\mathfrak{S}_1(v \mid \tau),\quad \mathfrak{S}_2(v \mid \tau),\quad \mathfrak{S}_3(v \mid \tau),\quad \mathfrak{S}_4(v \mid \tau),$$

ou

$$\mathfrak{S}_1(v, q),\quad \mathfrak{S}_2(v, q),\quad \mathfrak{S}_3(v, q),\quad \mathfrak{S}_4(v, q),$$

à la place de

$$\mathfrak{S}_1(v),\quad \mathfrak{S}_2(v),\quad \mathfrak{S}_3(v),\quad \mathfrak{S}_4(v)$$

Avec ces notations, les résultats du n° 159 peuvent être mis sous la forme suivante

$$\text{(XXXIII)}\quad \begin{cases} (1) & \dfrac{\pi}{\omega_1} q_0^3 q^{\frac{1}{4}} \sigma u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\mathfrak{S}_1(v), \\ (2) & 2 q_0 q_1^2 q^{\frac{1}{4}} \sigma_1 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\mathfrak{S}_2(v), \\ (3) & q_0 q_2^2 \sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\mathfrak{S}_3(v), \\ (4) & q_0 q_3^2 \sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\mathfrak{S}_4(v) \end{cases}$$

162. Les formules (XXXIII_{1-4}) peuvent s'écrire sous diverses formes, avec lesquelles il convient de se familiariser.

La première montre que $\mathfrak{S}_1(v)$ s'annule pour $u = 0$. En prenant les dérivées des deux membres par rapport à u, en supposant $u = 0$ et en se rappelant que l'on a $\sigma' 0 = 1$, on trouve

$$\frac{\pi}{\omega_1} q_0^3 q^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2\omega_1}\mathfrak{S}_1'(0).$$

Divisons l'égalité (1), membre à membre, par celle que nous venons d'obtenir; divisons de même chacune des égalités (2), (3), (4), membre à membre, par celle qu'on en déduit en y faisant $u = 0$, on trouvera

$$\text{(XXXIII)}\quad \begin{cases} (5) & \sigma u = 2\omega_1 \dfrac{\mathfrak{S}_1(v)}{\mathfrak{S}_1'(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2}, \\ (6) & \sigma_\alpha u = \dfrac{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \end{cases}$$

En prenant les dérivées logarithmiques par rapport à u des deux membres des relations précédentes, il vient aussi

$$\text{(XXXIII)}\quad \begin{cases} (7) & \zeta u - \dfrac{\eta_1 u}{\omega_1} = \dfrac{1}{2\omega_1}\dfrac{\mathfrak{S}_1'(v)}{\mathfrak{S}_1(v)}, \\ (8) & \zeta_\alpha u - \dfrac{\eta_1 u}{\omega_1} = \dfrac{1}{2\omega_1}\dfrac{\mathfrak{S}_{\alpha+1}'(v)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)}, \end{cases}$$

et l'on peut mettre ces dernières relations, en tenant compte de celles qui précèdent, sous la forme

$$\sigma' u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} \sigma u + \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1'(0)} e^{2\eta_1 \omega_1 v^2},$$

$$\sigma'_\alpha u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} \sigma_\alpha u + \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta'_{\alpha+1}(v)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} e^{2\eta_1 \omega_1 v^2}.$$

Si l'on se reporte aux formules (XXXI_{3-4}) qui donnent les expressions de $\sqrt[4]{e_2 - e_3}$, ..., au moyen de $q^{\frac{1}{4}}$, q_0, ..., on voit qu'on peut encore écrire

$$(\mathrm{XXXIII}) \begin{cases} (9) & \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[8]{G} \quad \sigma u = i e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \vartheta_1(v), \\ (10) & \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3}\, \sigma_1 u = i e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \vartheta_2(v), \\ (11) & \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3}\, \sigma_2 u = e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \vartheta_3(v), \\ (12) & \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_2}\, \sigma_3 u = e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \vartheta_4(v) \end{cases}$$

En remplaçant dans les formules (XXXIII_{1-4}) σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ par leurs développements en produits infinis à simple entrée (XXIX), pris chacun sous la forme qui met en évidence la variable v, on trouve enfin

$$(\mathrm{XXXII}) \begin{cases} (5) & \vartheta_1(v) = 2 q_0 q^{\frac{1}{4}} \sin v\pi \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2v\pi + q^{4n}), \\ (6) & \vartheta_2(v) = 2 q_0 q^{\frac{1}{4}} \cos v\pi \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2v\pi + q^{4n}), \\ (7) & \vartheta_3(v) = q_0 \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2v\pi + q^{4n-2}), \\ (8) & \vartheta_4(v) = q_0 \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2v\pi + q^{4n-2}) \end{cases}$$

163 Il est quelquefois commode de prendre z comme variable indépendante et de considérer, au lieu des fonctions $\vartheta(v)$, les

fonctions suivantes qui n'en diffèrent au fond que par le nom de la variable.

Si l'on pose

$$\text{(XXXII)}\quad\begin{cases}(1\ bis)\quad \rho_1(z)=\frac{1}{i}\sum_n(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}z^{2n+1},\\ (2\ bis)\quad \rho_2(z)=\sum_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}z^{2n+1},\\ (3\ bis)\quad \rho_3(z)=\sum_n q^{n^2}z^{2n},\\ (4\ bis)\quad \rho_4(z)=\sum_n(-1)^n q^{n^2}z^{2n},\end{cases}$$

on a manifestement

$$\rho_1(z)=\mathfrak{S}_1(v),\qquad \rho_2(z)=\mathfrak{S}_2(v),$$
$$\rho_3(z)=\mathfrak{S}_3(v),\qquad \rho_4(z)=\mathfrak{S}_4(v).$$

En remplaçant, dans les formules (XXXIII$_{1-4}$) $\mathfrak{S}_1(v)$, $\mathfrak{S}_2(v)$, $\mathfrak{S}_3(v)$, $\mathfrak{S}_4(v)$, respectivement par $\rho_1(z)$, $\rho_2(z)$, $\rho_3(z)$, $\rho_4(z)$ et σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ par les produits infinis à simple entrée (XXIX), pris chacun sous la forme qui met en évidence la variable z, on obtient les relations

$$\text{(XXXII)}\quad\begin{cases}(5\ bis)\quad \rho_1(z)=2q_0 q^{\frac{1}{4}}\frac{z-z^{-1}}{2i}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}z^{-2})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}z^2),\\ (6\ bis)\quad \rho_2(z)=2q_0 q^{\frac{1}{4}}\frac{z+z^{-1}}{2}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n}z^{-2})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n}z^2),\\ (7\ bis)\quad \rho_3(z)=q_0\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n-1}z^{-2})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n-1}z^2),\\ (8\ bis)\quad \rho_4(z)=q_0\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n-1}z^{-2})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n-1}z^2),\end{cases}$$

dont nous ferons usage dans un instant.

164. Les fonctions $\mathfrak{S}_1(v)$, $\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)$ que nous venons de définir et dont nous avons établi le lien avec les fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ diffèrent

profondément de ces fonctions par la façon dont y sont engagées les périodes, qui dans les fonctions $\mathfrak{S}$ n'entrent plus que par leur *rapport*. Les séries trigonométriques ($XXXII_{1-4}$), qui représentent ces fonctions, sont très élégantes . elles sont précieuses dans les applications numériques à cause de leur rapide convergence. Les fonctions $\mathfrak{S}$ jouent d'ailleurs un rôle essentiel dans des recherches importantes d'Analyse, d'Algèbre et d'Arithmétique. Nous allons, dans les pages qui suivent, développer les propriétés fondamentales de ces fonctions.

Plusieurs de ces propriétés se déduisent immédiatement des propriétés correspondantes des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$. On reconnaît ainsi très facilement quels sont les zéros des fonctions $\mathfrak{S}$, si elles sont paires ou impaires, ce qu'elles deviennent lorsqu'on remplace u par $u + 2\omega_1$, $u + 2\omega_3$, $u + \omega_1$, $u + \omega_3$, ce qui revient à remplacer v par $v + 1$, $v + \tau$, $v + \frac{1}{2}$, $v + \frac{\tau}{2}$, le changement de u en $u - \omega_2$ donnerait les formules relatives au changement de v en $v + \frac{1+\tau}{2}$. On peut ainsi obtenir toutes les formules (XXXIV).

Le Tableau qui suit

($XXXIV_1$)

$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_4$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\tau}{2}$	$\frac{\tau}{2}$

donne les valeurs de v qui annulent les diverses fonctions $\mathfrak{S}$; ces valeurs ont été placées au-dessous de la fonction correspondante, il est sous-entendu qu'on peut leur ajouter un nombre de la forme $m + n\tau$, m et n étant entiers.

Les formules

$$(XXXIV_2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_1(-v) = -\mathfrak{S}_1(v), \\ \mathfrak{S}_{\alpha+1}(-v) = \mathfrak{S}_{\alpha+1}(v) \end{cases}$$

n'ont pas besoin d'explication.

Les formules

$$(\text{XXXIV}_3)\quad \begin{cases} \vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v), \\ \vartheta_2(v+1) = -\vartheta_2(v), \\ \vartheta_3(v+1) = \quad \vartheta_3(v), \\ \vartheta_4(v+1) = \quad \vartheta_4(v), \end{cases}$$

$$(\text{XXXIV}_4)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right) = \quad \vartheta_2(v), \\ \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}\right) = -\vartheta_1(v), \\ \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right) = \quad \vartheta_4(v), \\ \vartheta_4\left(v+\frac{1}{2}\right) = \quad \vartheta_3(v) \end{cases}$$

s'obtiennent de la façon la plus aisée, sans passer par les fonctions σ, en partant des séries trigonométriques; elles mettent en évidence, comme ces dernières, la périodicité des quatre fonctions ϑ

Les formules

$$(\text{XXXIV}_5)\quad \begin{cases} \vartheta_1(v+\tau) = -A\,\vartheta_1(v), \\ \vartheta_2(v+\tau) = \quad A\,\vartheta_2(v), \\ \vartheta_3(v+\tau) = \quad A\,\vartheta_3(v), \\ \vartheta_4(v+\tau) = -A\,\vartheta_4(v), \\ \qquad A = \quad q^{-1}e^{-2i\pi v}, \end{cases}$$

$$(\text{XXXIV}_6)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = iB\,\vartheta_4(v), \\ \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \quad B\,\vartheta_3(v), \\ \vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \quad B\,\vartheta_2(v), \\ \vartheta_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = iB\,\vartheta_1(v), \\ \qquad B = q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v} \end{cases}$$

peuvent se déduire des formules ($\text{XXXII}_{1-4\ bis}$) légèrement modifiées. Si l'on y remplace q et z par leurs valeurs $e^{\tau\pi i}$, $e^{v\pi i}$, on ob-

tient de suite

$$\vartheta_1(v) = \frac{1}{i}\sum_n (-1)^n e^{\tau\pi i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{v}{\tau}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]},$$

$$\vartheta_2(v) = \sum_n e^{\tau\pi i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{v}{\tau}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]},$$

$$\vartheta_3(v) = \sum_n e^{\tau\pi i\left(n^2 + 2\frac{v}{\tau}n\right)},$$

$$\vartheta_4(v) = \sum_n (-1)^n e^{\tau\pi i\left(n^2 + 2\frac{v}{\tau}n\right)}.$$

Les quantités entre crochets dans les exponentielles sont toutes des trinomes du second degré en n qui deviennent des carrés parfaits quand on leur ajoute la quantité $\frac{v^2}{\tau^2}$; on peut donc écrire

$$(\text{XXXII})\quad \begin{cases} (9) & e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\vartheta_1(v) = \frac{1}{i}\sum_n (-1)^n e^{\tau\pi i\left(n+\frac{1}{2}+\frac{v}{\tau}\right)^2}, \\ (10) & e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\vartheta_2(v) = \sum_n e^{\tau\pi i\left(n+\frac{1}{2}+\frac{v}{\tau}\right)^2}, \\ (11) & e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\vartheta_3(v) = \sum_n e^{\tau\pi i\left(n+\frac{v}{\tau}\right)^2}, \\ (12) & e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\vartheta_4(v) = \sum_n (-1)^n e^{\tau\pi i\left(n+\frac{v}{\tau}\right)^2}, \end{cases}$$

or on voit qu'en remplaçant v par $v+\tau$ et n par $n-1$, les exponentielles se reproduisent, en sorte que, par ce changement, le premier et le quatrième des seconds membres changent seulement de signes, tandis que le second et le troisième restent invariables. On a ainsi, par exemple,

$$e^{\frac{\pi i(v+\tau)^2}{\tau}}\vartheta_1(v+\tau) = -e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\vartheta_1(v),$$

d'où

$$\vartheta_1(v+\tau) = -q^{-1}e^{-2i\pi v}\vartheta_1(v),$$

et l'on obtient de même $\vartheta_2(v+\tau)$, $\vartheta_3(v+\tau)$, $\vartheta_4(v+\tau)$ au moyen de $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_4(v)$

On voit tout aussi aisément sur ces formules comment les choses se passent quand on change v en $v+\frac{\tau}{2}$. Il suffit de remplacer, dans les deux premières, n par $n-1$ et v par $v+\frac{\tau}{2}$ $\left(\text{ce qui change } n+\frac{1}{2}+\frac{v}{\tau} \text{ en } n+\frac{v}{\tau}\right)$, et, dans les deux dernières, simplement v par $v+\frac{\tau}{2}$ $\left(\text{ce qui change } n+\frac{v}{\tau} \text{ en } n+\frac{v}{\tau}+\frac{1}{2}\right)$. En tenant compte d'ailleurs de ce que l'on a

$$e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}-\frac{\pi i}{\tau}\left(v+\frac{\tau}{2}\right)^2}=e^{-\pi i v-\frac{\pi i \tau}{4}}=q^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi i v},$$

on obtient les expressions de $\mathfrak{S}_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)$, $\mathfrak{S}_{\alpha+1}\left(v+\frac{\tau}{2}\right)$ au moyen de $\mathfrak{S}_1(v)$, $\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)$. Finalement, on arrive ainsi aux formules (XXXIV$_6$).

En répétant m fois les formules (3) et n fois les formules (5), on a aussi

$$(\text{XXXIV}_7)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_1(v+m+n\tau)=(-1)^{m+n}\,q^{-n^2}e^{-2n v\pi i}\mathfrak{S}_1 v,\\ \mathfrak{S}_2(v+m+n\tau)=(-1)^{m}\quad q^{-n^2}e^{-2n v\pi i}\mathfrak{S}_2 v,\\ \mathfrak{S}_3(v+m+n\tau)=\qquad\qquad q^{-n^2}e^{-2n v\pi i}\mathfrak{S}_3 v,\\ \mathfrak{S}_4(v+m+n\tau)=(-1)^{n}\quad q^{-n^2}e^{-2n v\pi i}\mathfrak{S}_4 v \end{cases}$$

Enfin, en combinant les formules (4) et (6), on parvient aux formules

$$(\text{XXXIV}_8)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_1\left(v+\dfrac{1+\tau}{2}\right)=\quad B\,\mathfrak{S}_3(v),\\ \mathfrak{S}_2\left(v+\dfrac{1+\tau}{2}\right)=-iB\,\mathfrak{S}_4(v),\\ \mathfrak{S}_3\left(v+\dfrac{1+\tau}{2}\right)=\quad iB\,\mathfrak{S}_1(v),\\ \mathfrak{S}_4\left(v+\dfrac{1+\tau}{2}\right)=\quad B\,\mathfrak{S}_2(v), \end{cases}$$

qui correspondent au changement de u en $u-\omega_2$

Observons en passant que les formules (XXXIV$_3$) et (XXXIV$_5$), ou, si l'on veut, les formules (XXXIV$_7$), qui les contiennent comme cas particuliers, mettent en évidence ce fait que les quotients de fonctions $\mathfrak{S}$ sont des fonctions doublement périodiques, avec les

périodes 2, 2τ on prévoit ainsi le rôle que joueront ces quotients.

165. Comme le changement de v en $v+m+n\tau$ revient au changement de z en $(-1)^m q^n z$, et que les changements de v en $v+\frac{1}{2}$, $v+\frac{\tau}{2}$, $v+\frac{1+\tau}{2}$ reviennent aux changements de z en iz, $z\sqrt{q}$, $iz\sqrt{q}$, les formules précédentes peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
\rho_1[(-1)^m q^n z] &= (-1)^{m+n} q^{-n^2} z^{-2n} \rho_1(z),\\
\rho_2[(-1)^m q^n z] &= (-1)^m \quad q^{-n^2} z^{-2n} \rho_2(z),\\
\rho_3[(-1)^m q^n z] &= \qquad\qquad q^{-n^2} z^{-2n} \rho_3(z),\\
\rho_4[(-1)^m q^n z] &= (-1)^n \quad q^{-n^2} z^{-2n} \rho_4(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_1(iz) &= \rho_2(z),\\
\rho_2(iz) &= -\rho_1(z),\\
\rho_3(iz) &= \rho_4(z),\\
\rho_4(iz) &= \rho_3(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_1(z\sqrt{q}) &= \frac{i}{z\sqrt[4]{q}}\rho_4(z),\\
\rho_2(z\sqrt{q}) &= \frac{1}{z\sqrt[4]{q}}\rho_3(z),\\
\rho_3(z\sqrt{q}) &= \frac{1}{z\sqrt[4]{q}}\rho_2(z),\\
\rho_4(z\sqrt{q}) &= \frac{i}{z\sqrt[4]{q}}\rho_1(z),\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Ces formules se déduisent d'ailleurs immédiatement des définitions des diverses fonctions $\rho(z)$.

166 Les fonctions $\mathfrak{S}$ vérifient toutes les quatre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}(v\,|\,\tau)}{\partial v^2} = 4\pi i\,\frac{\partial \mathfrak{S}(v\,|\,\tau)}{\partial \tau}.$$

Nous avons vu, en effet (n° 160), que les séries qui définissent les fonctions $\mathfrak{S}_1(v,\tau)$, $\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v,\tau)$, séries qui rentrent dans le type

$$\sum_n \mathrm{A}_n\, e^{\tau\pi i(n+\alpha)^2+2v\pi i(n+\alpha)},$$

peuvent être différentiées, terme à terme, soit par rapport à v, soit par rapport à τ. Or la quantité

$$t = e^{\tau\pi i(n+\alpha)^2+2v\pi i(n+\alpha)}$$

vérifie, comme on s'en assure immédiatement, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0,$$

il en est donc de même des quatre fonctions $\mathfrak{S}$.

III. — Sur quelques fonctions du rapport des périodes. Formules diverses.

167. En faisant $v = 0$ dans les formules qui donnent les expressions des fonctions $\mathfrak{S}(v)$ où l'argument est augmenté de 1, τ, $m + n\tau$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$, on trouve les valeurs de ces fonctions pour $v = 1$, τ, $m + n\tau$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$. celles de ces valeurs qui ne sont pas nulles s'expriment au moyen de q et de $\mathfrak{S}_2(0)$, $\mathfrak{S}_3(0)$, $\mathfrak{S}_4(0)$ Ces valeurs se lisent si rapidement sur les formules (XXXIV) qu'on a jugé inutile de les récrire ici. Nous nous bornons à transcrire les résultats obtenus en faisant $v = 0$ dans les formules (XXXIV), après qu'on a pris les dérivées des deux membres, on obtient ainsi le Tableau de formules (XXXV), dans lequel $\mathfrak{S}'(v)$ désigne toujours la dérivée par rapport à v de la fonction $\mathfrak{S}(v)$ Il convient d'observer, d'une part, que les trois quantités $\mathfrak{S}'_{\alpha+1}(0)$ sont nulles, puisque les trois fonctions $\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)$ sont paires; d'autre part, qu'il ne s'introduit pas dans le Tableau d'autre élément nouveau que $\mathfrak{S}'_1(0)$

$$(\text{XXXV}_1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{S}'_1(1) = -\mathfrak{S}'_1(0), \\ \mathfrak{S}'_2(1) = 0, \\ \mathfrak{S}'_3(1) = 0, \\ \mathfrak{S}'_4(1) = 0; \end{cases}$$

$$(\text{XXXV}_2)\quad \begin{cases} \vartheta'_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \\ \vartheta'_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\vartheta'_1(0), \\ \vartheta'_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \\ \vartheta'_4\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(\text{XXXV}_3)\quad \begin{cases} \vartheta'_1(\tau) = -q^{-1}\vartheta'_1(0), \\ \vartheta'_2(\tau) = -2i\pi q^{-1}\vartheta_2(0), \\ \vartheta'_3(\tau) = -2i\pi q^{-1}\vartheta_3(0), \\ \vartheta'_4(\tau) = 2i\pi q^{-1}\vartheta_4(0); \end{cases}$$

$$(\text{XXXV}_4)\quad \begin{cases} \vartheta'_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = \pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4(0), \\ \vartheta'_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = -i\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3(0), \\ \vartheta'_3\left(\frac{\tau}{2}\right) = -i\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(0), \\ \vartheta'_4\left(\frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta'_1(0), \end{cases}$$

$$(\text{XXXV}_5)\quad \begin{cases} \vartheta'_1(m+n\tau) = (-1)^{m+n}q^{-n^2}\vartheta'_1(0), \\ \vartheta'_2(m+n\tau) = (-1)^{m+1}2n\pi i q^{-n^2}\vartheta_2(0), \\ \vartheta'_3(m+n\tau) = -2n\pi i q^{-n^2}\vartheta_3(0), \\ \vartheta'_4(m+n\tau) = (-1)^{n+1}2n\pi i q^{-n^2}\vartheta_4(0), \end{cases}$$

$$(\text{XXXV}_6)\quad \begin{cases} \vartheta'_1\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -i\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3(0), \\ \vartheta'_2\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4(0), \\ \vartheta'_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta'_1(0), \\ \vartheta'_4\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -i\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(0). \end{cases}$$

Il est à peine utile de remarquer que toutes ces quantités ne dépendent que de τ.

On aurait des formules analogues, que nous nous dispensons d'écrire, pour les valeurs des fonctions $\rho(z)$ ou de leurs dérivées, quand on suppose z égal à i, $\sqrt{q}$, $i\sqrt{q}$, ... ; les quantités $\vartheta_{\alpha+1}(0)$

sont respectivement égales aux quantités $\rho_{\alpha+1}(1)$; quant à $\rho'_1(1)$ c'est $\frac{1}{\pi i}\vartheta'_1(0)$.

168. Les relations entre les quantités $\vartheta'_1(0)$, $\vartheta_{\alpha+1}(0)$, envisagées comme des fonctions de q, permettent d'établir des propositions importantes de la théorie des nombres. Aussi convient-il de nous arrêter un instant à l'étude de ces fonctions.

Voici d'abord leurs expressions en fonction de q, obtenues en posant $v=0$, $z=1$ dans les formules (XXXII$_{1-4}$); toutefois, pour la première de ces formules, on a pris la dérivée des deux membres par rapport à v avant de faire $v=0$,

$$(\text{XXXVI}_1)\quad \begin{cases} \vartheta'_1(0)=\pi\sum_n(-1)^n(2n+1)\,q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\pi\left(q^{\frac{1}{4}}-3q^{\frac{9}{4}}+5q^{\frac{25}{4}}-\quad\right), \\ \vartheta_2(0)=\sum_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+\ldots, \\ \vartheta_3(0)=\sum_n q^{n^2} = 1+2q+2q^4+2q^9+\quad, \\ \vartheta_4(0)=\sum_n(-1)^n q^{n^2} = 1-2q+2q^4-2q^9+\ldots \end{cases}$$

On trouve de même, au moyen des formules (XXXIII$_{1-4}$) par exemple,

$$(\text{XXXVI}_2)\quad \begin{cases} \vartheta'_1(0)=2\pi q_0^3\,q^{\frac{1}{4}}, \\ \vartheta_2(0)=2\,q_0 q_1^2\,q^{\frac{1}{4}}, \\ \vartheta_3(0)=q_0 q_2^2, \\ \vartheta_4(0)=q_0 q_3^2 \end{cases}$$

En comparant ces relations aux égalités (XXXI$_{3-4}$) qui donnent les expressions de $\sqrt[8]{\mathcal{G}}$ et des quantités $\sqrt[4]{e_2-e_3}$, $\sqrt[4]{e_1-e_3}$, $\sqrt[4]{e_1-e_2}$ au moyen de $q^{\frac{1}{4}}$, q_0, q_1, q_2, q_3, on trouve

$$(\text{XXXVI}_3)\quad \begin{cases} 2\omega_1\sqrt[8]{\mathcal{G}} = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\,\vartheta'_1(0), \\ \sqrt[4]{e_2-e_3} = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\,\vartheta_2(0), \\ \sqrt[4]{e_1-e_3} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\,\vartheta_3(0), \\ \sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\,\vartheta_4(0). \end{cases}$$

Ces mêmes formules s'obtiennent évidemment en supposant $v = 0$, $u = 0$ dans les relations (XXXIII_{0-12}); toutefois, pour la première, on doit d'abord prendre les dérivées des deux membres. Il va sans dire que $\sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}$ doit avoir la même signification que dans les formules (XXXI_{3-1})

On tire de là

$$(\text{XXXVI}_4)\quad \left\{\begin{aligned} \sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_1-e_2} &= -\frac{\pi}{8\omega_1^3}\mathfrak{S}_1'^2(0),\\ \sqrt{e_2-e_3} &= -\frac{\pi}{2\omega_1}\mathfrak{S}_2^2(0)\\ \sqrt{e_1-e_3} &= \frac{\pi}{2\omega_1}\mathfrak{S}_3^2(0),\\ \sqrt{e_1-e_2} &= \frac{\pi}{2\omega_1}\mathfrak{S}_4^2(0) \end{aligned}\right.$$

Puisque les quantités $\mathfrak{S}_2^2(0)$, $\mathfrak{S}_3^2(0)$, $\mathfrak{S}_4^2(0)$, $\mathfrak{S}_1'^2(0)$ ne dépendent que de τ, on voit que ces formules mettent bien en évidence la propriété des radicaux $\sqrt{e_2-e_3}$, .., de se reproduire divisés par λ quand on remplace ω_1, ω_3 par $\lambda\omega_1$, $\lambda\omega_3$ (XVIII_4).

169. Comme l'on a $q_1 q_2 q_3 = 1$, on voit immédiatement que les quatre quantités $\mathfrak{S}_1'(0)$, $\mathfrak{S}_2(0)$, $\mathfrak{S}_3(0)$, $\mathfrak{S}_4(0)$ sont liées par la relation

$$(\text{XXXVI}_5)\qquad \mathfrak{S}_1'(0) = \pi\mathfrak{S}_2(0)\mathfrak{S}_3(0)\mathfrak{S}_4(0)$$

En élevant au carré les trois dernières égalités (XXXVI_4) et en les combinant comme l'on a fait quand on a obtenu la relation

$$16\,q q_1^8 = q_2^8 - q_3^8,$$

on obtient la relation équivalente

$$(\text{XXXVI}_6)\qquad \mathfrak{S}_3^4(0) = \mathfrak{S}_2^4(0) + \mathfrak{S}_4^4(0).$$

Si l'on tient compte de la relation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, on déduit aussi des trois dernières formules (XXXVI_4), en les résolvant par

rapport à e_1, e_2, e_3,

$$
(\text{XXXVI}_7)\quad \left\{
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\quad \vartheta_3^4(0) + \vartheta_4^4(0)],\\
e_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\quad \vartheta_2^4(0) - \vartheta_4^4(0)],\\
e_3 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [-\vartheta_2^4(0) - \vartheta_3^4(0)]
\end{aligned}
\right.
$$

En se rappelant (n° 99) que l'on a

$$
-g_2 = 4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \qquad g_3 = 4e_1e_2e_3,
$$

et en tenant compte de la relation (XXXVI_6), il vient aussi

$$
(\text{XXXVI}_8)\quad \left\{
\begin{aligned}
g_2 &= \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4 [\vartheta_2^8(0) + \vartheta_3^8(0) - \vartheta_2^4(0)\vartheta_3^4(0)],\\
g_3 &= \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6 \left\{ \frac{1}{6^3}[\vartheta_2^{12}(0) + \vartheta_3^{12}(0)] \right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{4\ 6^2}[\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)]\vartheta_2^4(0)\vartheta_3^4(0) \right\}
\end{aligned}
\right.
$$

170. Si l'on pose avec Jacobi

$$
(\text{XXXVII}_1)\qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},
$$

$$
(\text{XXXVII}_2)\qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},
$$

on voit que l'égalité $\vartheta_3^4(0) = \vartheta_2^4(0) + \vartheta_4^4(0)$ prend la forme

$$
(\text{XXXVII}_3)\qquad k^2 + k'^2 = 1
$$

On déduit aussi des formules (XXXVI_3) les relations

$$
(\text{XXXVII}_4)\qquad \sqrt{k} = \frac{\sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}},
$$

$$
(\text{XXXVII}_5)\qquad \sqrt{k'} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}},
$$

qui entraînent également la formule (XXXVII_3). Enfin, en tenant

compte des formules ($XXXVI_2$), on a

$$(XXXVII_6)\qquad \sqrt{k} = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{q_1^2}{q_2^2} = 2q^{\frac{1}{4}}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q\,)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right]^2,$$

$$(XXXVII_7)\qquad \sqrt{k'} = \frac{q_3^2}{q_2^2} = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q\,)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right]^2,$$

et cette forme donnée à $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ invite à considérer $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ en tant que fonctions univoques de τ.

171. Dans un Mémoire célèbre [1], M. Hermite a désigné ces fonctions par $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ en posant

$$(XXXVIII_1)\qquad \varphi(\tau) = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\frac{q_1}{q_2},$$

où $\sqrt{2}$ est la racine carrée positive de 2, et

$$(XXXVIII_2)\qquad \psi(\tau) = \frac{q_3}{q_2}.$$

Les égalités

$$(XXXVIII_3)\qquad \varphi^2(\tau) = \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = \sqrt{k},$$

$$(XXXVIII_4)\qquad \psi^2(\tau) = \frac{\vartheta_4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = \sqrt{k'}$$

sont manifestes.

En même temps que ces fonctions, M. Hermite a introduit [2] la fonction univoque de τ

$$(XXXVIII_5)\qquad \chi(\tau) = \sqrt[6]{2}\,q^{\frac{1}{24}}\frac{1}{q_2},$$

où $\sqrt[6]{2}$ est la racine sixième réelle et positive de 2.

Les fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ sont liées par les relations

$$(XXXVIII_6)\qquad \varphi^8(\tau) + \psi^8(\tau) = 1,$$

$$(XXXVIII_7)\qquad \varphi(\tau)\psi(\tau) = \chi^3(\tau),$$

qui équivalent à nos formules ($XXVIII_{5-6}$)

---

[1] *Comptes rendus*, t XLVI, p 508

[2] *Ibid*, p 715

Nous joindrons à ces fonctions celle que M Dedekind a désignée (¹) par $\eta(\tau)$ et que nous représenterons par $\mathrm{h}(\tau)$ à cause de l'usage que nous avons déjà fait de la lettre η. Cette fonction est définie par la formule

$$(\text{XXXVIII}_8) \qquad \mathrm{h}(\tau) = q^{\frac{1}{12}} q_0.$$

On voit immédiatement que les fonctions φ, ψ, χ, h sont réelles et positives pour une valeur purement imaginaire de τ

Signalons encore les fonctions $f(\tau)$, $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ introduites (²) par M Weber

$$(\text{XXXVIII}_9) \qquad \begin{cases} f(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} q_2 = \dfrac{\sqrt[6]{2}}{\chi(\tau)}, \\ f_1(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} q_3 = \dfrac{\sqrt[6]{2}\,\psi(\tau)}{\chi(\tau)}, \\ f_2(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} q_1 = \dfrac{\sqrt[6]{2}\,\varphi(\tau)}{\chi(\tau)}. \end{cases}$$

Ces fonctions et la fonction $\mathrm{h}(\tau)$ sont liées aux quantités $\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0\,|\,\tau)$ et $\mathfrak{S}'_1(0\,|\,\tau)$ par les relations évidentes et très symétriques

$$(\text{XXXVIII}_{10}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}'_1(0\,|\,\tau) = 2\pi\,\mathrm{h}^3(\tau), \\ \mathfrak{S}_2(0\,|\,\tau) = \mathrm{h}(\tau)\, f_2^2(\tau), \\ \mathfrak{S}_3(0\,|\,\tau) = \mathrm{h}(\tau)\, f^2(\tau), \\ \mathfrak{S}_4(0\,|\,\tau) = \mathrm{h}(\tau)\, f_1^2(\tau). \end{cases}$$

Les diverses fonctions de τ que nous avons définies dans ce pa-

---

(¹) *Journal de Crelle*, t 83

(²) *Elliptische Functionen*, p 63 M Dedekind a employé les mêmes notations f, f_1, f_2 pour désigner les fonctions suivantes (*Journal de Crelle*, t 83, p. 283)

$$f(\tau) = \frac{\mathrm{h}(2\tau)\,\mathrm{h}\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{h}\left(\frac{\tau+1}{2}\right)}{\mathrm{h}^3(\tau)},$$

$$f_1(\tau) = \frac{2^4\,\mathrm{h}^8(2\tau) + \mathrm{h}^8\left(\frac{\tau}{2}\right) + \rho\,\mathrm{h}^8\left(\frac{\tau+1}{2}\right)}{\mathrm{h}^8(\tau)},$$

$$f_2(\tau) = \frac{[\varphi^8(\tau)+\rho]^3\,[\varphi^8(\tau)+\rho^2]^3}{\varphi^{16}(\tau)\,\psi^{16}(\tau)},$$

où $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

ragraphe jouent un rôle important dans les applications des fonctions elliptiques à l'Algèbre et à la théorie des nombres Au point de vue analytique, il importe de remarquer qu'elles n'ont été définies que pour des valeurs de τ représentées par des points situés au-dessus de l'axe des quantités réelles

172. Reportons-nous aux formules (XXXIII) qui permettent de passer des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ aux fonctions $\mathfrak{S}_1(v)$, $\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)$. On obtient des identités importantes quand on développe les deux membres suivant les puissances de $v = \dfrac{u}{2\omega_1}$ et que l'on égale dans les deux membres les coefficients d'une même puissance de v. Les développements des premiers membres, où figurent les fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ résultent immédiatement des formules (IX_1) et (XI_7), quant aux seconds membres, on n'aura qu'à y remplacer $e^{2\eta_1\omega_1 v^2}$ par son développement en série et $\mathfrak{S}_1(v)$, $\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)$ respectivement par

$$\frac{v}{1}\mathfrak{S}'_1(0) + \frac{v^3}{1.2.3}\mathfrak{S}'''_1(0) + \ldots,$$

$$\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0) + \frac{v^2}{1.2}\mathfrak{S}''_{\alpha+1}(0) + \frac{v^4}{1.2.3.4}\mathfrak{S}^{(\text{IV})}_{\alpha+1}(0) + \ldots$$

Choisissons, par exemple, parmi les formules (XXXIII), celles-ci

$$\sigma u = 2\omega_1 \frac{\mathfrak{S}_1(v)}{\mathfrak{S}'_1(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2}, \qquad \sigma_\alpha u = \frac{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2}.$$

En écrivant, d'une part, que, dans le développement de σu, le terme en u^3 manque, de l'autre, que, dans le développement de $\sigma_\alpha u$, les coefficients de u^2 et de u^4 sont $-\dfrac{e_\alpha}{2}$, $\dfrac{g_2}{48} - \dfrac{e_\alpha^2}{8}$, et que, par conséquent, les coefficients de v^2 et de v^4 sont $-2e_\alpha\omega_1^2$ et $\left(\dfrac{g_2}{3} - 2e_\alpha^2\right)\omega_1^4$, on trouve de suite

$$(\text{XXXIX}) \quad \begin{cases} (1) & 2\eta_1\omega_1 = -\dfrac{1}{6}\dfrac{\mathfrak{S}'''_1(0)}{\mathfrak{S}'_1(0)}, \\ (2) & 2\eta_1\omega_1 = -2e_\alpha\omega_1^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathfrak{S}''_{\alpha+1}(0)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)}, \\ (3) & 2\eta_1^2\omega_1^2 = \left(\dfrac{g_2}{3} - 2e_\alpha^2\right)\omega_1^4 - \eta_1\omega_1\dfrac{\mathfrak{S}''_{\alpha+1}(0)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)} - \dfrac{1}{24}\dfrac{\mathfrak{S}^{(\text{IV})}_{\alpha+1}(0)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)} \end{cases}$$

La seconde de ces égalités équivaut à trois égalités, si on les

suppose écrites, qu'on les ajoute membre à membre et qu'on tienne compte de la relation $e_1+e_2+e_3=0$, on aura

$$6\eta_1\omega_1=-\frac{1}{2}\left[\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}\right],$$

et, par conséquent, à cause de la première des égalités précédentes, on a aussi la relation très symétrique

$$(\text{XXXIX}_4)\qquad \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}.$$

En éliminant η_1 entre la seconde et la troisième des égalités précédentes, on obtient la relation

$$\frac{\vartheta_{\alpha+1}^{(\text{IV})}(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)}-3\frac{\vartheta_{\alpha+1}''^{2}(0)}{\vartheta_{\alpha+1}^{2}(0)}=8(g_2-12e_\alpha^2)\,\omega_1^4;$$

d'ailleurs les relations

$$g_2=-4(e_\beta e_\gamma+e_\gamma e_\alpha+e_\alpha e_\beta),$$
$$e_\alpha+e_\beta+e_\gamma=0$$

montrent de suite que l'on a

$$g_2-12e_\alpha^2=-4(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma),$$

et, en séparant les divers cas possibles, on trouve immédiatement, au moyen des formules (XXXVI_1), les suivantes

$$(\text{XXXIX}_5)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\vartheta_2^{\text{IV}}(0)}{\vartheta_2(0)}-3\frac{\vartheta_2''^{2}(0)}{\vartheta_2^{2}(0)}&=-2\pi^4\vartheta_3^4(0)\vartheta_4^4(0)=-32(e_1-e_2)(e_1-e_3)\,\omega_1^4,\\
\frac{\vartheta_3^{\text{IV}}(0)}{\vartheta_3(0)}-3\frac{\vartheta_3''^{2}(0)}{\vartheta_3^{2}(0)}&=2\pi^4\vartheta_2^4(0)\vartheta_4^4(0)=32(e_1-e_2)(e_2-e_3)\,\omega_1^4,\\
\frac{\vartheta_4^{\text{IV}}(0)}{\vartheta_4(0)}-3\frac{\vartheta_4''^{2}(0)}{\vartheta_4^{2}(0)}&=-2\pi^4\vartheta_3^4(0)\vartheta_2^4(0)=-32(e_1-e_3)(e_2-e_3)\,\omega_1^4.
\end{aligned}\right.$$

173. Signalons encore les résultats suivants, dont nous ferons usage par la suite.

Si, dans les formules

$$\vartheta_3(v\mid\tau)=\sum_n e^{\pi i(\tau n^2+2vn)},$$

$$\vartheta_4(v\mid\tau)=\sum_n(-1)^n e^{\pi i(\tau n^2+2vn)},$$

on considère, dans les seconds membres, les termes pour lesquels n est pair, on voit que leur ensemble n'est autre chose que $\vartheta_3(2v \mid 4\tau)$, les termes où n est impair sont, d'ailleurs, égaux et de signes contraires; on a donc

$$(\mathrm{XL}_1) \qquad 2\vartheta_3(2v \mid 4\tau) = \vartheta_3(v \mid \tau) + \vartheta_4(v \mid \tau).$$

On aura de même

$$\mathrm{XL}_1) \qquad 2\vartheta_2(2v \mid 4\tau) = \vartheta_3(v \mid \tau) - \vartheta_4(v \mid \tau).$$

Quand on fait, dans ces formules, $v = 0$, on obtient par division, en posant

$$b = \sqrt{k(4\tau)} = \frac{\vartheta_2(0 \mid 4\tau)}{\vartheta_3(0 \mid 4\tau)},$$

et en tenant compte des formules ($\mathrm{XXXVII}_{2,5}$), les relations

$$(\mathrm{XL}_2) \quad b = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{2q + 2q^9 + 2q^{25} + \ldots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots}.$$

Comme, en vertu de la relation (XXXIII_6), on a

$$\frac{\vartheta_2(v \mid \tau)}{\vartheta_3(v \mid \tau)} = \sqrt{k}\,\frac{\sigma_1(u \mid \omega_1, \omega_3)}{\sigma_2(u \mid \omega_1, \omega_3)},$$

on doit avoir aussi, en remplaçant ω_3 par $4\omega_3$, τ par 4τ, et, par suite, $\sqrt{k}$ par b,

$$\frac{\vartheta_2(v \mid 4\tau)}{\vartheta_3(v \mid 4\tau)} = b\,\frac{\sigma_1(u \mid \omega_1, 4\omega_3)}{\sigma_2(u \mid \omega_1, 4\omega_3)},$$

ou encore, en changeant u en $2u$ et v en $2v$,

$$\frac{\vartheta_2(2v \mid 4\tau)}{\vartheta_3(2v \mid 4\tau)} = b\,\frac{\sigma_1(2u \mid \omega_1, 4\omega_3)}{\sigma_2(2u \mid \omega_1, 4\omega_3)}.$$

D'ailleurs les formules (XL_1) donnent par division, en tenant compte de (XXXIII_{11-12}),

$$\frac{\vartheta_2(2v \mid 4\tau)}{\vartheta_3(2v \mid 4\tau)} = \frac{\vartheta_3(v \mid \tau) - \vartheta_4(v \mid \tau)}{\vartheta_3(v \mid \tau) + \vartheta_4(v \mid \tau)} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sigma_2 u - \sqrt[4]{e_1 - e_2}\,\sigma_3 u}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sigma_2 u + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\,\sigma_3 u},$$

on a donc finalement la relation

$$(\mathrm{XL}_3)\quad b\,\frac{\sigma_1(2u\,|\,\omega_1, 4\omega_3)}{\sigma_2(2u\,|\,\omega_1, 4\omega_3)} = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2(u\,|\,\omega_1,\omega_3) - \sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3(u\,|\,\omega_1,\omega_3)}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2(u\,|\,\omega_1,\omega_3) + \sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3(u\,|\,\omega_1,\omega_3)},$$

dont on apercevra l'utilité plus tard.

174. Nous terminerons ce paragraphe par quelques remarques relatives au cas où l'on a, q étant réel,

$$0 < q < 1.$$

Quand les quantités ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$ interviendront, nous les supposerons réelles et positives (¹); enfin nous ne considérerons que des valeurs réelles de v Les fonctions $\mathfrak{S}$ sont alors des fonctions réelles d'une variable réelle.

Observons d'abord que les quantités q_0, q_1, q_2, q_3 sont réelles et positives (XXVIII_1), on voit, en outre, que l'on a

$$q_0 < 1 < q_1, \qquad q_3 < 1 < q_2$$

Il en résulte, à cause des équations (XXXVI_2), que les quantités $\mathfrak{S}'_1(0)$, $\mathfrak{S}_2(0)$, $\mathfrak{S}_3(0)$, $\mathfrak{S}_4(0)$ sont réelles et positives : cette propriété apparaîtrait aussi bien, pour les trois dernières, sur les développements en série (XXXVI_1); on a, en outre,

$$\mathfrak{S}_3(0) > \mathfrak{S}_4(0)$$

Les racines e_1, e_2, e_3 sont réelles; la première est positive, la dernière est négative, on a

$$e_1 > e_2 > e_3,$$

les quantités $\sqrt{e_1-e_3}$, $\sqrt{e_1-e_2}$ sont réelles et positives, la quantité $\sqrt{e_2-e_3}$ est négative, tout cela a été démontré au nº 121 et résulte à nouveau des formules (XXXVI_7) et (XXXVI_4)

La quantité η_1 est réelle . elle peut être positive ou négative ainsi qu'il résulte de la formule (XXX_4) qui montre clairement

---

(¹) Le lecteur traitera sans peine le cas où $\omega_1 i$ et ω_3 sont des quantités réelles et négatives, cas auquel q est réel et vérifie aussi l'inégalité $0 < q < 1$ On passe d'ailleurs de ce cas au cas considéré par la substitution $\Omega_1 = \omega_3$, $\Omega_3 = -\omega_1$.

que l'équation en q,

$$\eta_1 = 0,$$

admet une racine réelle et une seule comprise entre zéro et un. Les formules (XXX_{1-3}) montrent que des trois quantités $e_1 + \frac{\eta_1}{\omega_1}$, $e_2 + \frac{\eta_1}{\omega_1}$, $e_3 + \frac{\eta_1}{\omega_1}$, les deux premières sont positives et la troisième négative, d'après cela, et en vertu des équations ($XXXIX_2$), il en est de même des trois quantités $-\vartheta''_2(0)$, $-\vartheta''_3(0)$, $-\vartheta''_4(0)$; la quantité $\vartheta'''_1(0)$ est ($XXXIX_1$) de signe contraire à η_1.

175. Considérons maintenant les fonctions $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_{\alpha+1}(v)$.

Le signe de ces fonctions pour les valeurs réelles de v apparaît de bien des façons : le plus simple est de recourir aux décompositions en produits infinis ($XXXII_{5-8}$) qui montrent que $\vartheta_1(v)$ et $\vartheta_2(v)$ ont respectivement les signes de $\sin v\pi$ et $\cos v\pi$, et que les fonctions $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_4(v)$, qui ne s'annulent pour aucune valeur réelle de v, sont toujours positives.

Les formules ($XXXIV_{2-3}$) montrent qu'il suffit d'étudier la variation [1] des fonctions $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_4(v)$, en faisant varier v de 0 à 1.

En prenant les dérivées par rapport à v, on tire immédiatement de l'équation ($XXXIII_7$)

$$\frac{d}{dv}\frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)} = -4\omega_1^2\left(pu + \frac{\eta_1}{\omega_1}\right).$$

Quand v augmente de 0 à $\frac{1}{2}$, $u = 2\omega_1 v$ augmente de 0 à ω_1 et pu diminue de $+\infty$ à e_1 : le second membre diminue donc de $-\infty$ à $-4\omega_1^2\left(e_1 + \frac{\eta_1}{\omega_1}\right)$; or cette dernière quantité est négative ; par conséquent, la fonction $\frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)}$ va toujours en diminuant pour v un peu plus grand que 0 elle est positive et très grande, comme toute dérivée logarithmique d'une fonction réelle qui vient de passer par zéro, et ainsi qu'il résulte, d'ailleurs, de ce que $\vartheta'_1(0)$ est un nombre positif et de ce que la fonction $\vartheta_1(v)$ est positive dans

---

(1) HALPHEN, t I, p 285

l'intervalle $(0,1)$. D'ailleurs (XXXV$_2$), pour $v=\frac{1}{2}$, la fonction $\vartheta'_1(v)$ est nulle.

Ainsi, quand v augmente de o à $\frac{1}{2}$, la fonction $\frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)}$ décroît de $+\infty$ à o et, puisque la fonction $\vartheta_1(v)$ reste constamment positive, il en est de même de la fonction $\vartheta'_1(v)$; par suite, enfin, $\vartheta_1(v)$ augmente. Quand v augmente ensuite de $\frac{1}{2}$ à 1, $\vartheta_1(v)$ diminue en reprenant symétriquement les mêmes valeurs, à cause de l'égalité

$$\vartheta_1(1-v)=-\vartheta_1(-v)=\vartheta_1(v)$$

La façon dont varie $\vartheta_1(v)$ pour des valeurs réelles de v est donc tout à fait analogue à la façon dont varie la fonction $\sin v\pi$.

A cause de l'égalité

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_2(v),$$

on voit ensuite que $\vartheta_2(v)$ varie comme $\cos v\pi$.

Maintenant les égalités (XXXIII$_8$) donnent encore, en prenant les dérivées par rapport à v,

$$\frac{d}{dv}\frac{\vartheta'_{\alpha+1}(v)}{\vartheta_{\alpha+1}(v)}=-4\omega_1^2\left[p(u+\omega_\alpha)+\frac{\eta_1}{\omega_1}\right]$$

et, en particulier,

$$\frac{d}{dv}\frac{\vartheta'_4(v)}{\vartheta_4(v)}=-4\omega_1^2\left[p(u+\omega_3)+\frac{\eta_1}{\omega_1}\right].$$

Quand u augmente de o à ω_1, $p(u+\omega_3)$ augmente de e_3 à e_2; la quantité entre crochets, dans le second membre, augmente donc de $e_3+\frac{\eta_1}{\omega_1}$ à $e_2+\frac{\eta_1}{\omega_1}$. La première de ces quantités est négative, la seconde positive. Lors donc que v augmente de o à $\frac{1}{2}$, le premier membre, d'abord positif, s'annule pour une certaine valeur $v=v_0$, puis devient négatif. La fonction $\frac{\vartheta'_4(v)}{\vartheta_4(v)}$ augmente quand v augmente de o à v_0, diminue quand v augmente de v_0 à $\frac{1}{2}$, elle est nulle pour $v=0$, elle sera donc positive pour $v=v_0$; enfin

pour $v = \frac{1}{2}$ on a

$$\vartheta_4\left(\frac{1}{2}\right) = \vartheta_3(0) = q_0 q_2^2, \qquad \vartheta_4'\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

on voit donc que la fonction $\vartheta_4'(v)$ reste constamment positive et que la fonction $\vartheta_4(v)$ augmente constamment depuis $\vartheta_4(0) = q_0 q_3^2$ jusqu'à $\vartheta_4\left(\frac{1}{2}\right) = \vartheta_3(0) = q_0 q_2^2$; lorsque v augmente ensuite de $\frac{1}{2}$ à 1, $\vartheta_4(v)$ diminue en reprenant symétriquement les mêmes valeurs à cause de l'égalité

$$\vartheta_4(1 - v) = \vartheta_4(v).$$

Ainsi, pour ce qui est du sens de la variation, la fonction $\vartheta_4(v)$ se comporte comme ferait la fonction $1 - 2q\cos 2\pi v$, si q était plus petit que $\frac{1}{2}$, de même, la fonction $\vartheta_3(v)$ se comporte comme ferait la fonction $1 + 2q\cos 2\pi v$, si q était plus petit que $\frac{1}{2}$.

IV — Transformation linéaire des fonctions ϑ

176 Nous avons supposé jusqu'ici que les quatre fonctions ϑ étaient formées avec le même couple primitif $2\omega_1$, $2\omega_3$, ou plutôt avec le même rapport $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$. Supposons maintenant que l'on remplace le couple $(2\omega_1, 2\omega_3)$ par le couple proprement équivalent $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$ tel que l'on ait

$$\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,$$

où a, b, c, d sont des entiers qui vérifient la condition $ad - bc = 1$ Cela reviendra à remplacer

$$v = \frac{u}{2\omega_1}, \qquad z = e^{v\pi i}, \qquad \tau, \qquad q = e^{\tau\pi i},$$

par

$$V = \frac{u}{2\Omega_1} = \frac{v}{a + b\tau}, \qquad e^{V\pi i}, \qquad T = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \qquad Q = e^{T\pi i},$$

η_1, η_3 par

$$H_1 = a\eta_1 + b\eta_3, \qquad H_3 = c\eta_1 + d\eta_3,$$

et enfin q_0, q_1, q_2, q_3 par les quantités Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 formées au moyen de Q comme q_0, q_1, q_2, q_3 au moyen de q. On obtiendra ainsi quatre nouvelles fonctions que nous désignerons par

$$\vartheta_1(V\,|\,T),\quad \vartheta_2(V\,|\,T),\quad \vartheta_3(V\,|\,T),\quad \vartheta_4(V\,|\,T)$$

Si l'on applique les formules ($XXXIII_{1-4}$) aux fonctions $\sigma(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3)$, $\sigma_1(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3)$, $\sigma_2(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3)$, $\sigma_3(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3)$ qui ne sont autres que les fonctions σu, $\sigma_\lambda u$, $\sigma_\mu u$, $\sigma_\nu u$ formées avec les demi-périodes ω_1, ω_3 et affectées d'indices λ, μ, ν dont la valeur est fixée par le Tableau (XX_8), on trouve de suite

$$(\text{XLI})\quad \begin{cases} (1) & \dfrac{\pi}{\Omega_1} Q_0^3 Q^{\frac{1}{4}} \sigma u = e^{2H_1\Omega_1 V^2}\vartheta_1(V\,|\,T), \\ (2) & 2 Q_0 Q_1^2 Q^{\frac{1}{4}} \sigma_\lambda u = e^{2H_1\Omega_1 V^2}\vartheta_2(V\,|\,T), \\ (3) & Q_0 Q_2^2 \sigma_\mu u = e^{2H_1\Omega_1 V^2}\vartheta_3(V\,|\,T), \\ (4) & Q_0 Q_3^2 \sigma_\nu u = e^{2H_1\Omega_1 V^2}\vartheta_4(V\,|\,T) \end{cases}$$

et ces formules, si l'on connaissait λ, μ, ν, fourniraient, par la comparaison avec les formules mêmes d'où on les a tirées, des relations entre les fonctions $\vartheta(v\,|\,\tau)$, $\vartheta(V\,|\,T)$. Les formules ($XXXIII_{5-12}$), appliquées de la même façon, permettent de faire un pas de plus.

177. Mais il convient tout d'abord de faire, sur la signification des radicaux, quelques remarques analogues à celles du n° 129.

Les quantités $\sqrt[4]{E_2 - E_3}$, $\sqrt[4]{E_1 - E_3}$, $\sqrt[4]{E_1 - E_2}$ doivent être définies par les formules

$$(\text{XLI}_5)\quad \begin{cases} \sqrt[4]{E_2 - E_3} = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\Omega_1}}\, 2 Q_0 Q_1^2 Q^{\frac{1}{4}}, \\ \sqrt[4]{E_1 - E_3} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\Omega_1}}\, Q_0 Q_2^2, \\ \sqrt[4]{E_1 - E_2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\Omega_1}}\, Q_0 Q_3^2, \end{cases}$$

où, dès que l'on a fixé la signification de $\sqrt{\dfrac{\pi}{2\Omega_1}}$, il ne reste rien d'arbitraire. Or, si l'on remplace E_1, E_2, E_3 par e_λ, e_μ, e_ν, rien n'autorise à penser que les racines quatrièmes que l'on vient de

définir soient les mêmes que celles qui sont définies par les formules (XXXI_3); ainsi, si l'on a $E_2 = e_2$, $E_3 = e_3$, on ne peut nullement affirmer que $\sqrt[4]{E_2 - E_3}$ soit égale à $\sqrt[4]{e_2 - e_3}$, mais seulement que $\sqrt[4]{E_2 - E_3}$ est égale à $\sqrt[4]{e_2 - e_3}$ multipliée par une racine quatrième de l'unité. En général, les quantités $(E_2 - E_3)^2$, $(E_1 - E_3)^2$, $(E_1 - E_2)^2$ sont identiques aux quantités $(e_2 - e_3)^2$, $(e_1 - e_3)^2$, $(e_1 - e_2)^2$ rangées dans un certain ordre, en sorte que l'on peut affirmer que les quantités $\sqrt[4]{E_2 - E_3}$, $\sqrt[4]{E_1 - E_3}$, $\sqrt[4]{E_1 - E_2}$ sont respectivement identiques aux quantités $\sqrt[4]{e_2 - e_3}$, $\sqrt[4]{e_1 - e_3}$, $\sqrt[4]{e_1 - e_2}$ rangées dans un certain ordre et multipliées chacune par une racine *huitième* de l'unité convenablement choisie.

De même, en conservant à $\mathcal{G}$ le même sens qu'au n° 101, il est clair que l'on a

$$(E_2 - E_3)^2 (E_1 - E_3)^2 (E_1 - E_2)^2 = (e_2 - e_3)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_1 - e_2)^2 = \mathcal{G},$$

et la formule (XXXI_4) montre que l'on doit avoir

$$(\mathrm{XLI}_6) \qquad \varepsilon \sqrt[8]{\mathcal{G}} = i \frac{\pi}{\Omega_1} \sqrt{\frac{\pi}{2\Omega_1}}\, Q_0^3 Q^{\frac{1}{4}},$$

ε étant une racine huitième de l'unité convenablement choisie.

178 Quoi qu'il en soit, il est manifeste que, en adoptant ces notations, les formules (XXXIII_{9-12}) nous donnent les suivantes

$$(\mathrm{XLI}) \quad \begin{cases} (7) & \varepsilon \sqrt[8]{\mathcal{G}} \sqrt{\dfrac{2\Omega_1}{\pi}}\, \sigma u = i e^{2H_1\Omega_1 V^2} \vartheta_1(V \mid T), \\ (8) & \sqrt[4]{E_2 - E_3} \sqrt{\dfrac{2\Omega_1}{\pi}}\, \sigma_\lambda u = i e^{2H_1\Omega_1 V^2} \vartheta_2(V \mid T), \\ (9) & \sqrt[4]{E_1 - E_3} \sqrt{\dfrac{2\Omega_1}{\pi}}\, \sigma_\mu u = e^{2H_1\Omega_1 V^2} \vartheta_3(V \mid T), \\ (10) & \sqrt[4]{E_1 - E_2} \sqrt{\dfrac{2\Omega_1}{\pi}}\, \sigma_\nu u = e^{2H_1\Omega_1 V^2} \vartheta_4(V \mid T) \end{cases}$$

Reprenons maintenant les formules (XXXIII_{9-12}) elles-mêmes et observons que les trois dernières entraînent la suivante

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}\, \sigma_\alpha u = \varepsilon_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_{\alpha+1}(v),$$

où ε_1 est égal à quelque racine huitième de l'unité qui peut d'ail-

leurs dépendre de α, β, γ. Appliquons cette formule en prenant pour les nombres α, β, γ successivement les nombres λ, μ, ν; μ, ν, λ; ν, λ, μ et observons que $\sqrt[4]{\text{E}_2-\text{E}_3}$, $\sqrt[4]{\text{E}_1-\text{E}_3}$, $\sqrt[4]{\text{E}_1-\text{E}_2}$ ne peuvent différer respectivement de $\sqrt{e_\mu - e_\nu}$, $\sqrt[4]{e_\nu - e_\lambda}$, $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$ que par des facteurs égaux à quelque racine huitième de l'unité; comparons les formules ainsi obtenues aux formules (XLI_{8-10}), et la formule (XLI_7) à la formule (XXXIII_9); observons enfin que la différence $2\eta_1\omega_1 v^2 - 2\text{H}_1\Omega_1 \text{v}^2$ se réduit manifestement, en vertu de la relation $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$, à l'expression $bv\text{v}\pi i$ et nous parviendrons au théorème suivant.

Quels que soient les entiers a, b, c, d vérifiant la condition $ad - bc = 1$, on aura, en désignant par ε, ε', ε'', ε''' des racines huitièmes de l'unité dont les valeurs dépendent de a, b, c, d, les formules que voici

$$(\text{XLII})\quad \begin{cases} (1) & \varepsilon\sqrt{a+b\tau}\, e^{bv\text{v}\pi i}\,\vartheta_1(v\,|\,\tau) = \vartheta_1(\text{v}\,|\,\text{T}),\\ (2) & \varepsilon'\sqrt{a+b\tau}\, e^{bv\text{v}\pi i}\,\vartheta_{\lambda+1}(v\,|\,\tau) = \vartheta_2(\text{v}\,|\,\text{T}),\\ (3) & \varepsilon''\sqrt{a+b\tau}\, e^{bv\text{v}\pi i}\,\vartheta_{\mu+1}(v\,|\,\tau) = \vartheta_3(\text{v}\,|\,\text{T}),\\ (4) & \varepsilon'''\sqrt{a+b\tau}\, e^{bv\text{v}\pi i}\,\vartheta_{\nu+1}(v\,|\,\tau) = \vartheta_4(\text{v}\,|\,\text{T}), \end{cases}$$

où les nombres λ, μ, ν sont donnés en fonction de a, b, c, d par le Tableau (XX_6).

179. Il reste à déterminer, dans chaque cas particulier, les racines huitièmes de l'unité ε, ε', ε'', ε''' Nous observerons tout d'abord que ce n'est pas d'une racine huitième de l'unité qu'il s'agit vraiment, mais seulement du signe d'une racine carrée.

En effet, pour chacun des six cas du n° 128, nous avons déterminé, sans ambiguité, dans le Tableau (XX_7), les valeurs des radicaux $\sqrt{\text{E}_2-\text{E}_3}$, $\sqrt{\text{E}_1-\text{E}_3}$, $\sqrt{\text{E}_1-\text{E}_2}$. Dès lors les racines quatrièmes $\sqrt[4]{\text{E}_2-\text{E}_3}$, $\sqrt[4]{\text{E}_1-\text{E}_3}$, $\sqrt[4]{\text{E}_1-\text{E}_2}$ ne peuvent avoir que deux valeurs égales et de signes contraires, et c'est entre ces deux valeurs qu'il s'agit de choisir. Nous allons d'ailleurs montrer que quand le choix a été fait pour l'un des radicaux, il s'impose pour les autres · en d'autres termes, on peut exprimer, sans ambiguité, trois des quatre racines ε, ε', ε'', ε''' à l'aide de la quatrième.

Remplaçons, par exemple, dans l'égalité (XLII_1), v successi-

vement par $v+\frac{1}{2}$, $v+\frac{1}{2}\tau$, $v+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$ et, par conséquent, v par $v+\frac{1}{2}(a+b\tau)$, $v+\frac{1}{2}(c+d\tau)$, $v+\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(b+d)\tau$. En faisant usage des formules (XXXIV), en réduisant et en comparant les résultats obtenus aux trois égalités ($XLII_{2-4}$), on obtient aisément, dans les six cas du Tableau (XX_6), pour les rapports $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$, $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}$, $\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon}$, les égalités

$$(XLII_7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} &= i^{\frac{ab}{2}+a+m'}, \\ \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} &= i^{\frac{ab+cd}{2}+bc+a+c+m''}, \\ \frac{\varepsilon'''}{\varepsilon} &= i^{\frac{cd}{2}+c-1+m'''}, \end{aligned}\right.$$

où m', m'', m''' sont trois nombres entiers dont la valeur est donnée par le Tableau suivant :

($XLII_8$)

	1°.	2°	3°	4°	5°	6°
m'	-1	-1	-1	-1	b	b
m''	-1	$b+d$	-1	$b+d$	-1	-1
m'''	d	-1	d	-1	-1	-1

Il s'agit donc finalement de déterminer seulement ε, dont la valeur, comme nous l'avons fait observer plus haut, ne dépend que du signe d'une racine carrée. La détermination de ce signe en fonction explicite des nombres a, b, c, d est un des problèmes difficiles de la théorie qui nous occupe. il a été résolu pour la première fois par M. Hermite [1]. Avant de donner la solution de ce problème, nous commencerons par indiquer un moyen qui per-

[1] *Sur quelques formules relatives a la transformation des fonctions elliptiques* (*Journal de Liouville*, 2e série, t III, p 26)

mettra de déterminer effectivement la valeur de ε, toutes les fois que les nombres a, b, c, d sont donnés.

180. Nous effectuerons d'abord cette détermination pour les deux substitutions propres

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui, par répétition et combinaison, engendrent toutes les autres.

Pour la première de ces deux substitutions, on a

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_3 = \omega_1 + \omega_3,$$
$$H_1 = \eta_1, \qquad H_3 = \eta_1 + \eta_3,$$

donc

$$T = \tau + 1, \qquad V = v, \qquad Q = -q, \qquad Q^{\frac{1}{4}} = \sqrt{i}\, q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{(\tau+1)\pi i}{4}},$$
$$Q_0 = q_0, \qquad Q_1 = q_1, \qquad Q_2 = q_3, \qquad Q_3 = q_2$$

et l'on est manifestement dans le cas 2° du Tableau (XX_6), où $\lambda = 1$, $\mu = 3$, $\nu = 2$

Il serait donc aisé, dans ce cas particulier, d'arriver au résultat en se servant des formules de transformation pour les fonctions σ et des formules de passage des fonctions σ aux fonctions $\mathfrak{S}$: en effet, les résultats précédents et les formules (XLI_5, $XXXI_3$) fournissent sans peine les relations

$$\sqrt[4]{E_2 - E_3} = i\sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\, 2\sqrt{i}\, q^{\frac{1}{4}} q_0 q_1^2 = \sqrt{i}\,\sqrt[4]{e_2 - e_3},$$
$$\sqrt[4]{E_1 - E_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0 q_3^2 = \sqrt[4]{e_1 - e_2},$$
$$\sqrt[4]{E_1 - E_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0 q_2^2 = \sqrt[4]{e_1 - e_3},$$

qui permettent d'achever les calculs

Mais il est encore plus simple de recourir aux formules ($XXXII_{1-4}$) qui définissent les fonctions $\mathfrak{S}$. On voit immédiatement, sur ces formules, que, par le changement de q en $-q$, les fonctions $\mathfrak{S}_3(v)$ et $\mathfrak{S}_4(v)$ s'échangent, tandis que les fonctions

$q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1(v)$ et $q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(v)$ restent invariables, et l'on parvient ainsi aux formules

$$
(\text{XLIII})\quad
\begin{cases}
(1) & \vartheta_1(v \mid \tau+1) = \sqrt{i}\,\vartheta_1(v \mid \tau), \\
(2) & \vartheta_2(v \mid \tau+1) = \sqrt{i}\,\vartheta_2(v \mid \tau), \\
(3) & \vartheta_3(v \mid \tau+1) = \vartheta_4(v \mid \tau), \\
(4) & \vartheta_4(v \mid \tau+1) = \vartheta_3(v \mid \tau).
\end{cases}
$$

On voit que, dans le cas considéré, en supposant que l'on prenne $\sqrt{a+b\tau} = \sqrt{1} = 1$, on a

$$\varepsilon = \varepsilon' = \sqrt{i}, \qquad \varepsilon'' = \varepsilon''' = 1$$

Ce résultat est d'ailleurs conforme au Tableau (XLII_0)

181 Pour la seconde des deux substitutions considérées on a $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 0$,

$$\Omega_1 = \omega_3, \qquad \Omega_3 = -\omega_1,$$
$$\text{H}_1 = \eta_3, \qquad \text{H}_3 = -\eta_1,$$

donc

$$\text{T} = -\frac{1}{\tau}, \qquad \text{V} = \frac{v}{\tau}, \qquad \sqrt{\frac{\Omega_1}{\omega_1}} = \sqrt{\tau}$$

et l'on est manifestement dans le cas 5° du Tableau (XX_0), où $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $\nu = 1$. Les formules (XLII_{1-4}) donnent donc

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon\ \sqrt{\tau}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}\vartheta_1(v \mid \tau),$$

$$\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon'\ \sqrt{\tau}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}\vartheta_4(v \mid \tau),$$

$$\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon''\ \sqrt{\tau}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}\vartheta_3(v \mid \tau),$$

$$\vartheta_4\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon'''\sqrt{\tau}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\tau}}\vartheta_2(v \mid \tau),$$

et l'on a, d'après le Tableau (XLII_0),

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = i, \qquad \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} = i, \qquad \frac{\varepsilon'''}{\varepsilon} = i$$

Portons notre attention sur la troisième des formules précé-

dentes où figurent des ϑ de même indice et que l'on peut écrire

$$\varepsilon'' \sqrt{\tau} = \frac{e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}} \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3(v \mid \tau)}.$$

Le second membre de cette égalité apparaît comme une fonction univoque de v et de τ; v ne figure pas dans le premier membre. On pourrait craindre que la détermination du premier membre ne dépendît de la valeur de v, en sorte que le second membre fût toujours égal à l'une des déterminations du premier, mais tantôt à l'une, tantôt à l'autre, suivant les valeurs de v. On peut bien prévoir qu'il n'en est pas ainsi, puisque, τ étant donné et $\sqrt{\tau}$ étant choisi arbitrairement, ε'' doit être entièrement déterminé; mais il est bien aisé de le reconnaître autrement. On vérifie de suite, en effet, que les zéros de $\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)$ coïncident avec les zéros de $\vartheta_3(v \mid \tau)$, et, comme ces zéros sont tous simples, il est clair, d'après sa forme, que le second membre ne peut être qu'une fonction continue de v; il ne peut donc passer d'une valeur constante à une autre valeur constante, il ne peut être égal qu'à une seule et même constante, et l'on a, en particulier,

$$\varepsilon'' = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\vartheta_3\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3(0 \mid \tau)},$$

ce qui fixe bien le sens de ε'' quand τ est donné et que la détermination de $\sqrt{\tau}$ est fixée.

Le premier membre ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs déterminées; le second membre apparaît comme une fonction de τ sur laquelle nous allons pouvoir répéter à peu près le raisonnement précédent. Fixons tout d'abord le sens de $\sqrt{\tau}$. La partie imaginaire de τ est positive, on peut donc poser

$$\tau = \rho e^{\theta i},$$

en supposant que les nombres réels ρ et θ vérifient les conditions

$$0 < \rho, \qquad 0 < \theta < \pi$$

Nous adopterons pour $\sqrt{\tau}$ la détermination

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\rho}\, e^{\frac{\theta}{2}i},$$

en supposant $\sqrt{\rho}$ positif; le point $\sqrt{\tau}$ est alors situé dans l'angle formé par l'axe des quantités réelles positives et l'axe des quantités purement imaginaires à coefficient positif, il se déplace d'une façon continue dans cet angle quand le point τ se déplace d'une façon continue au-dessus de l'axe des quantités réelles. Cette determination de $\sqrt{\tau}$ étant adoptée, la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\vartheta_3\left(0 \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3(0 \mid \tau)}$$

est une fonction univoque et continue de τ; c'est donc une seule et même constante.

Si nous prenons, par exemple, $\tau = i$, $\rho = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, nous aurons

$$\varepsilon'' = \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\vartheta_3(0 \mid i)}{\vartheta_3(0 \mid i)} = \frac{1}{\sqrt{i}},$$

d'où, puisque ε', ε'', ε''' sont égaux à $i\varepsilon$,

$$\varepsilon = \frac{1}{i\sqrt{i}}, \qquad \varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon''' = \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

Finalement les formules de transformation sont ici

$$(\text{XLIII}) \quad \begin{cases} (5) & \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{i\sqrt{i}} e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_1(v \mid \tau), \\ (6) & \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}} e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_4(v \mid \tau), \\ (7) & \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}} e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_3(v \mid \tau), \\ (8) & \vartheta_4\left(\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}} e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_2(v \mid \tau) \end{cases}$$

On observera que, dans ces formules, la partie réelle de $\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}$ est

positive. On a, en effet,

$$\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}} = |\sqrt{\rho}|\, e^{\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i},$$

et $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ est un nombre positif, puisque θ est compris entre o et π.

182. Ces formules se rapprochent naturellement des formules (XXXII_{0-12}). En changeant, par exemple dans la première de ces formules, τ en $-\frac{1}{\tau}$ et v en $\frac{v}{\tau}$, il vient

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{i}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(n+\frac{1}{2}-v\right)^2},$$

d'où, en comparant à la formule (XLIII_5),

$$\vartheta_1(v\,|\,\tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(n+\frac{1}{2}-v\right)^2}.$$

En changeant, sous le signe $\sum$, n en $-n$, on obtient donc la première des formules du Tableau suivant, dont les autres se déduisent de la même façon :

$$(\text{XLIV})\quad \begin{cases} \vartheta_1(v\,|\,\tau) = \dfrac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \displaystyle\sum_n (-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(v-\frac{1}{2}+n\right)^2}, \\ \vartheta_2(v\,|\,\tau) = \dfrac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \displaystyle\sum_n (-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v+n)^2}, \\ \vartheta_3(v\,|\,\tau) = \dfrac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \displaystyle\sum_n e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v+n)^2}, \\ \vartheta_4(v\,|\,\tau) = \dfrac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \displaystyle\sum_n e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(v-\frac{1}{2}+n\right)^2}, \end{cases}$$

$\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}}$ est l'inverse de $\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}$ et doit donc avoir sa partie réelle positive.

183. Pour $v = 0$, les formules (XLIII_{1-8}) nous donnent les re-

lations

$$
(\text{XLIII})\quad
\begin{cases}
(9)\quad \vartheta_1'(0\mid\tau+1)=\sqrt{i}\,\vartheta_1'(0\mid\tau),\\
(10)\quad \vartheta_2(0\mid\tau+1)=\sqrt{i}\,\vartheta_2(0\mid\tau),\\
(11)\quad \vartheta_3(0\mid\tau+1)=\vartheta_4(0\mid\tau),\\
(12)\quad \vartheta_4(0\mid\tau+1)=\vartheta_3(0\mid\tau),
\end{cases}
$$

$$
(\text{XLIII})\quad
\begin{cases}
(13)\quad \vartheta_1'\left(0\mid-\frac{1}{\tau}\right)=-\sqrt{i}\,\tau\sqrt{\tau}\,\vartheta_1'(0\mid\tau),\\
(14)\quad \vartheta_2\left(0\mid-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\vartheta_4(0\mid\tau),\\
(15)\quad \vartheta_3\left(0\mid-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\vartheta_3(0\mid\tau),\\
(16)\quad \vartheta_4\left(0\mid-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\vartheta_2(0\mid\tau)
\end{cases}
$$

184. A ces relations se joignent immédiatement celles qui concernent les transformations linéaires correspondantes des fonctions $h(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$.

Lorsqu'on remplace τ par $\tau+1$, q est remplacé par $-q$, q_0 et q_1 restent inaltérés, tandis que q_2 et q_3 s'échangent; on a donc, sur la définition même des fonctions $h(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$,

$$
(\text{XLV})\quad
\begin{cases}
(1)\quad h(\tau+1)=\sqrt[8]{i}\,h(\tau),\\
(2)\quad \varphi(\tau+1)=\sqrt[4]{i}\,\dfrac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)},\\
(3)\quad \psi(\tau+1)=\dfrac{1}{\psi(\tau)},\\
(4)\quad \chi(\tau+1)=\sqrt[12]{i}\,\dfrac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)}.
\end{cases}
$$

185. Lorsqu'on remplace τ par $-\frac{1}{\tau}$, on déduit facilement la relation qui concerne $h(\tau)$ de la relation (XLIII_{13}) en faisant usage de l'égalité $\vartheta_1'(0)=2\pi h^3(\tau)$. On a ainsi

$$h^3\left(-\frac{1}{\tau}\right)=-\sqrt{i}\,\tau\sqrt{\tau}\,h^3(\tau)$$

et, par suite,

$$h\left(-\frac{1}{\tau}\right)=C\sqrt{\tau}\,h(\tau),$$

où C est une racine de l'unité. On a déjà fait observer (n° 181) que $\sqrt{\tau}$ est une fonction univoque de τ; en répétant les raisonnements de ce numéro, on voit immédiatement que C ne dépend pas de τ, d'ailleurs, pour $\tau = i$, on a $C = \frac{1}{\sqrt{i}}$; il vient donc finalement

$$\text{(XLV}_5\text{)} \qquad h\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}} h(\tau)$$

Quant aux fonctions $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$, on a d'abord (XXXVIII$_{3-4}$)

$$\varphi^2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\vartheta_2\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{\vartheta_4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3(0 \mid \tau)} = \psi^2(\tau),$$

donc

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \pm\psi(\tau),$$

où le signe ne dépend pas de τ. Mais si l'on suppose τ purement imaginaire, les fonctions φ et ψ sont réelles et positives, on a donc dans tous les cas

$$\text{(XLV}_6\text{)} \qquad \varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau),$$

et, ce qui est la même chose,

$$\text{(XLV}_7\text{)} \qquad \psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \varphi(\tau)$$

Enfin la relation $\varphi(\tau)\psi(\tau) = \chi^3(\tau)$ montre que l'on a

$$\chi^3\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \chi^3(\tau),$$

d'où

$$\chi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = C\chi(\tau),$$

en désignant par C une racine cubique de l'unité qui est la même, quel que soit τ. En observant que pour une valeur purement imaginaire de τ la fonction $\chi(\tau)$ a une valeur réelle et positive, comme il résulte de sa définition, on voit que C est égal à 1; on a donc

$$\text{(XLV}_8\text{)} \qquad \chi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \chi(\tau)$$

186. Les formules qui précèdent nous permettent, par répétition et combinaison (n° **149**), d'obtenir, chaque fois que a, b, c, d ont des valeurs numériques données, les formules de transformation linéaire pour toutes les fonctions considérées. Le problème de la transformation linéaire des fonctions $\mathfrak{S}$ et des fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$, $\mathrm{h}(\tau)$, peut donc être considéré comme résolu.

Parmi les substitutions linéaires dont on fait souvent usage, nous citerons les suivantes, où m et n sont des entiers quelconques,

$$(\text{XLV}_9)\quad \begin{cases} \varphi(\tau+2n) = i^{\frac{n}{2}}\varphi(\tau), \\ \varphi\left(\dfrac{\tau}{1-2n\tau}\right) = \varphi(\tau), \end{cases}$$

$$(\text{XLV}_{10})\quad \begin{cases} \psi(\tau+2n) = \psi(\tau), \qquad \psi(\tau+2n+1) = \dfrac{1}{\psi(\tau)}, \\ \psi\left(\dfrac{\tau}{1-2n\tau}\right) = i^{\frac{n}{2}}\psi(\tau), \end{cases}$$

$$(\text{XLV}_{11})\quad \begin{cases} \chi(\tau+2n) = i^{\frac{n}{6}}\chi(\tau), \\ \chi\left(\dfrac{\tau}{1-2n\tau}\right) = i^{\frac{n}{6}}\chi(\tau); \end{cases}$$

elles résultent immédiatement, par combinaison et répétition, des formules précédentes.

187. Le Tableau (XX_7) permet d'écrire immédiatement, dans les six cas possibles, les valeurs de $\varphi^4(\mathrm{T}) = k(\mathrm{T})$ et de $\psi^4(\mathrm{T}) = k'(\mathrm{T})$ en fonction de $\varphi^4(\tau) = k(\tau)$ et de $\psi^4(\tau) = k'(\tau)$. Il suffit pour cela de tenir compte des relations

$$k(\mathrm{T}) = -\frac{\sqrt{\mathrm{E}_2-\mathrm{E}_3}}{\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3}}, \qquad k'(\mathrm{T}) = \frac{\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2}}{\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3}}.$$

Mais les résultats précédents permettent d'obtenir davantage; on peut, en effet, en déduire $\varphi^2(\mathrm{T})$ et $\psi^2(\mathrm{T})$ en fonction de $\varphi^2(\tau)$ et de $\psi^2(\tau)$ dans les six cas considérés. En faisant usage des formules (XLII) et en posant

$$\varphi^2(\mathrm{T}) = \sqrt{k(\mathrm{T})} = \sqrt{l}, \qquad \psi^2(\mathrm{T}) = \sqrt{k'(\mathrm{T})} = \sqrt{l'},$$

on a

$$\sqrt{l} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,\mathrm{T})}{\vartheta_3(0\,|\,\mathrm{T})} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}\,\frac{\vartheta_{\lambda+1}(0\,|\,\tau)}{\vartheta_{\mu+1}(0\,|\,\tau)} = i^{-\frac{cd}{2}-bc-c+m'-m''}\,\frac{\vartheta_{\lambda+1}(0\,|\,\tau)}{\vartheta_{\mu+1}(0\,|\,\tau)},$$

$$\sqrt{l'} = \frac{\vartheta_4(0\,|\,\mathrm{T})}{\vartheta_3(0\,|\,\mathrm{T})} = \frac{\varepsilon'''}{\varepsilon''}\,\frac{\vartheta_{\nu+1}(0\,|\,\tau)}{\vartheta_{\mu+1}(0\,|\,\tau)} = i^{-\frac{ab}{2}-1-bc-a+m'''-m''}\,\frac{\vartheta_{\nu+1}(0\,|\,\tau)}{\vartheta_{\mu+1}(0\,|\,\tau)},$$

d'où résultent immédiatement, en tenant compte du Tableau (XLII$_6$), les formules annoncées dans les six cas du Tableau (XX$_6$) :

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
$\sqrt{l} =$	$i^{\frac{cd}{2}}\sqrt{k}$	$i^{\frac{cd}{2}}\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}$	$i^{-\frac{cd}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$i^{\frac{cd}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{k'}}$	$i^{-\frac{cd}{2}}\sqrt{k'}$	$i^{-\frac{cd}{2}}\dfrac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$
$\sqrt{l'} =$	$i^{-\frac{ab}{2}}\sqrt{k'}$	$i^{\frac{ab}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{k'}}$	$i^{-\frac{ab}{2}}\dfrac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$	$i^{\frac{ab}{2}}\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}$	$i^{\frac{ab}{2}}\sqrt{k}$	$i^{-\frac{ab}{2}}\sqrt{k}$

Sur ce Tableau, on observe immédiatement que les quantités $\varphi^8(\mathrm{T}) = k^2(\mathrm{T})$, $\psi^8(\mathrm{T}) = k'^2(\mathrm{T})$ ne sont susceptibles que de six valeurs, savoir :

$$k^2, \quad \frac{-k^2}{1-k^2}, \quad \frac{1}{k^2}, \quad \frac{1}{1-k^2}, \quad 1-k^2, \quad -\frac{1-k^2}{k^2}.$$

Ces six valeurs sont précisément celles que prend un rapport anharmonique quand on y permute de toutes les façons possibles les quatre éléments.

188. Les formules (XLV) nous permettent d'établir quelques relations importantes qui nous seront utiles plus tard; ces relations concernent les invariants de toutes les substitutions linéaires, et c'est sur ce point que nous allons maintenant fixer notre attention [1]

---

[1] Voir RAUSENBERGER, *Theorie der periodischen Functionen*, p. 367

Les formules (XLIII) mettent en évidence ce fait que chaque fonction symétrique entière de degré n, des quantités

$$\vartheta_2^8(0\mid\tau),\quad \vartheta_3^8(0\mid\tau),\quad \vartheta_4^8(0\mid\tau),$$

ne change pas lorsqu'on remplace τ par $\tau+1$ et se multiplie par τ^{4n}, lorsqu'on remplace τ par $-\frac{1}{\tau}$.

Le quotient de deux fonctions symétriques entières, de même degré, des quantités

$$\vartheta_2^8(0\mid\tau),\quad \vartheta_3^8(0\mid\tau),\quad \vartheta_4^8(0\mid\tau)$$

ne change donc pas lorsqu'on remplace τ soit par $\tau+1$, soit par $-\frac{1}{\tau}$, il ne change donc pas lorsqu'on effectue sur τ une transformation linéaire quelconque.

Parmi ces quotients, les plus simples sont ceux que l'on peut former à l'aide des trois fonctions symétriques élémentaires

$$\begin{gathered}\vartheta_2^8(0\mid\tau)+\vartheta_3^8(0\mid\tau)+\vartheta_4^8(0\mid\tau),\\ \vartheta_2^8(0\mid\tau)\vartheta_3^8(0\mid\tau)+\vartheta_3^8(0\mid\tau)\vartheta_4^8(0\mid\tau)+\vartheta_4^8(0\mid\tau)\vartheta_2^8(0\mid\tau),\\ \vartheta_2^8(0\mid\tau)\vartheta_3^8(0\mid\tau)\vartheta_4^8(0\mid\tau)\end{gathered}$$

Considérons en particulier le quotient

$$\frac{[\vartheta_2^8(0\mid\tau)+\vartheta_3^8(0\mid\tau)+\vartheta_4^8(0\mid\tau)]^3}{\vartheta_2^8(0\mid\tau)\vartheta_3^8(0\mid\tau)\vartheta_4^8(0\mid\tau)},$$

il s'exprime simplement en fonction de k^2. En tenant compte de la définition (XXXVII$_{1-2}$) de $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ et de la relation $k^2+k'^2=1$, on trouve immédiatement pour sa valeur

$$\frac{8(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}=\frac{(1+k^4+k'^4)^3}{k^4k'^4}.$$

On désigne habituellement par $J(\tau)$ et l'on nomme *invariant absolu* des fonctions doublement périodiques la fonction de τ,

$$\text{(XXXVII}_8\text{)}\qquad J(\tau)=\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2},$$

nous venons de voir qu'elle ne varie pas lorsque l'on effectue sur τ une substitution linéaire quelconque $(ad-bc=1)$, et que

l'on a

$$\frac{[\vartheta_2^8(0\mid\tau)+\vartheta_3^8(0\mid\tau)+\vartheta_4^8(0\mid\tau)]^3}{\vartheta_2^8(0\mid\tau)\vartheta_3^8(0\mid\tau)\vartheta_4^8(0\mid\tau)}=8\,J(\tau)$$

De plus, comme la relation (XXXVI_6)

$$\vartheta_3^4(0\mid\tau)=\vartheta_2^4(0\mid\tau)+\vartheta_4^4(0\mid\tau)$$

entraîne la suivante

$$\begin{aligned}&\vartheta_2^8(0\mid\tau)\vartheta_3^8(0\mid\tau)+\vartheta_3^8(0\mid\tau)\vartheta_4^8(0\mid\tau)+\vartheta_4^8(0\mid\tau)\vartheta_2^8(0\mid\tau)\\&\quad=\frac{1}{4}[\vartheta_2^8(0\mid\tau)+\vartheta_3^8(0\mid\tau)+\vartheta_4^8(0\mid\tau)]^2,\end{aligned}$$

on voit, en appliquant le théorème fondamental sur les fonctions symétriques, que tout quotient de deux fonctions symétriques quelconques, de même degré, des trois quantités

$$\vartheta_2^8(0\mid\tau),\quad \vartheta_3^8(0\mid\tau),\quad \vartheta_4^8(0\mid\tau),$$

est une fonction rationnelle de $J(\tau)$.

189 Il est facile d'exprimer $J(\tau)$ en fonction des invariants g_2 et g_3. Comme on a

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},$$

il vient immédiatement, en tenant compte des relations

$$e_1+e_2+e_3=0,$$

$$e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\frac{g_2}{4},$$

$$\mathcal{G}=(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2=\frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2),$$

la formule

$$(\mathrm{XXXVII}_{8\,bis})\qquad J(\tau)=\frac{27g_2^3}{4(g_2^3-27g_3^2)}.$$

Dans les notations de M. Weierstrass, on envisage souvent le quotient

$$\frac{g_2^3}{27g_3^2}$$

comme invariant absolu. Entre $J(\tau)$ et cet invariant, on a immédiatement les relations très simples

$$J(\tau) = \frac{3^3}{2^2} \frac{\dfrac{g_2^3}{27 g_3^2}}{\dfrac{g_2^3}{27 g_3^2} - 1},$$

$$\frac{g_2^3}{27 g_3^2} = \frac{J(\tau)}{J(\tau) - \dfrac{3^3}{2^2}}.$$

V. — Généralités sur les transformations linéaires Transformation linéaire des fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$.

190. Pour établir les formules de transformation linéaire générale pour les trois fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ de M. Hermite, ce qui, d'après le Tableau du n° 187, revient à la détermination d'un signe + ou — qui peut dépendre des quatre entiers a, b, c, d, il nous faut d'abord commencer par étudier de plus près ce mode de transformation.

Nous désignerons sous le nom de *transformation linéaire* l'opération qui consiste à remplacer τ par $\frac{c + d\tau}{a + b\tau}$, a, b, c, d étant quatre entiers qui vérifient la relation $ad - bc = 1$; elle se représentera par le symbole $\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right)$.

Si $\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right)$, $\left(\frac{c' + d'\tau}{a' + b'\tau}\right)$ sont deux symboles de transformation linéaire, le symbole

$$\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \frac{c' + d'\tau}{a' + b'\tau}\right)$$

représentera l'opération qui consiste à remplacer τ par

$$\frac{c + d\dfrac{c' + d'\tau}{a' + b'\tau}}{a + b\dfrac{c' + d'\tau}{a' + b'\tau}} = \frac{ca' + dc' + (cb' + dd')\tau}{aa' + bc' + (ab' + bd')\tau},$$

cette opération est manifestement une transformation linéaire. Elle sera dite *composée* avec les transformations

$$\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right), \quad \left(\frac{c' + d'\tau}{a' + b'\tau}\right).$$

De même, si $\left(\frac{c''+d''\tau}{a''+b''\tau}\right)$ est un troisième symbole de transformation linéaire, le symbole

$$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}, \frac{c'+d'\tau}{a'+b'\tau}, \frac{c''+d''\tau}{a''+b''\tau}\right)$$

représentera l'opération qui consiste à remplacer τ par

$$\frac{ca'+dc'+(cb'+dd')\dfrac{c''+d''\tau}{a''+b''\tau}}{aa'+bc'+(ab'+bd')\dfrac{c''+d''\tau}{a''+b''\tau}},$$

et l'on voit sans peine que cette opération est encore une transformation linéaire. Elle sera dite *composée* avec les transformations $\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$, $\left(\frac{c'+d'\tau}{a'+b'\tau}\right)$, $\left(\frac{c''+d''\tau}{a''+b''\tau}\right)$.

L'opération qui consiste à remplacer τ par $\frac{c+d\tau}{a+b\tau}$ est identique à l'opération qui consiste à remplacer respectivement ω_1, ω_3 par $a\omega_1+b\omega_3$, $c\omega_1+d\omega_3$: c'est l'opération que nous avons désignée au n° **146** sous le nom de *substitution*, et que nous avons représentée par le symbole $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, en sorte que, si l'on conserve les notations des n° **146-147**, on voit que l'opération

$$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}, \frac{c'+d'\tau}{a'+b'\tau}, \frac{c''+d''\tau}{a''+b''\tau}\right)$$

revient à la substitution [1]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Il est clair que dans un symbole de transformation

$$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}, \frac{c'+d'\tau}{a'+b'\tau}, \frac{c''+d''\tau}{a''+b''\tau}, \dots\right),$$

on peut grouper ensemble deux ou plusieurs termes consécutifs, de même que dans un produit symbolique de substitutions on peut remplacer plusieurs facteurs symboliques par leur produit effectué.

---

[1] *Voir*, en particulier, la note finale du n° 146, t I, p 241

L'opération qui consiste à remplacer τ par τ est la transformation identique.

La transformation $\left(\frac{-c+a\tau}{d-b\tau}\right)$ est la transformation *inverse* de $\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$; le symbole de transformation

$$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}, \frac{-c+a\tau}{d-b\tau}\right)$$

représente aussi la transformation identique

191. Le théorème établi aux nos **148-150** peut maintenant s'énoncer de la façon suivante : *Toute transformation linéaire peut s'obtenir par la composition de transformations de la forme* $(\tau\pm 1)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$. D'ailleurs, la répétition de n transformations de la forme $(\tau\pm 1)$ équivaut à une transformation de la forme $(\tau\pm n)$, la composition de deux transformations de cette dernière forme reproduit une transformation de même forme; enfin, la composition de deux transformations $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ reproduit la transformation identique, qui n'a pas d'influence. Rien n'empêche donc d'énoncer ce théorème de la façon suivante :

Toute transformation linéaire peut être représentée par un symbole de la forme

$$\left(\ldots, \tau+n_1, -\frac{1}{\tau}, \tau+n_2, -\frac{1}{\tau}, \tau+n_3, -\frac{1}{\tau}, \ldots\right);$$

n_1, n_2, n_3, ... étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

Le premier et le dernier des éléments de ce symbole peuvent d'ailleurs être de l'une ou de l'autre des deux formes $\tau+n$, $-\frac{1}{\tau}$. Par exemple, la transformation $\left(\frac{5\tau-27}{3\tau-16}\right)$ peut se représenter par le symbole

$$\left(\tau+2, -\frac{1}{\tau}, \tau+3, -\frac{1}{\tau}, \tau-5\right),$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{5\tau-27}{3\tau-16} = 2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{\tau-5}}.$$

192. Nous dirons qu'un ensemble de transformations linéaires, en nombre fini, constitue un *groupe* si la transformation identique fait partie de cet ensemble et si toute transformation obtenue en composant deux transformations de l'ensemble appartient aussi à cet ensemble. D'après cela, l'ensemble de toutes les transformations linéaires constitue un groupe. L'ensemble de toutes les transformations linéaires obtenues par répétition et combinaison des deux transformations $(\tau + 2)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ constitue aussi un groupe. Si dans un groupe de transformations linéaires on peut en isoler un nombre fini ou infini qui, prises dans leur ensemble, constituent un groupe, ce groupe partiel sera dit un *sous-groupe*, contenu dans le groupe total. Ainsi, le second des deux groupes précédents est un sous-groupe contenu dans le premier

Nous appellerons *fonction modulaire* (¹) une fonction univoque de τ qui reste invariable pour toutes les transformations linéaires d'un groupe Telle est, en particulier, la fonction $J(\tau)$, qui reste invariable pour toutes les transformations linéaires.

Si une fonction univoque de τ reste invariable pour quelques transformations linéaires, l'ensemble des transformations qui laissent cette fonction invariable constitue évidemment un groupe, en effet, la transformation identique fait partie de cet ensemble, puisque la fonction est univoque, et la transformation, composée de deux transformations linéaires de l'ensemble, laissant la fonction invariable, comme les deux transformations composantes, appartiendra de même à l'ensemble. On dit du groupe ainsi formé que la fonction considérée lui *appartient*

Une fonction univoque de τ qui, lorsqu'on fait subir à τ une transformation linéaire quelconque, ne peut prendre qu'un nombre limité de valeurs, est manifestement une fonction modulaire ; elle appartient au groupe des transformations linéaires qui laissent cette fonction invariable, telles sont les fonctions $k(\tau)$, $k'(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ précédemment définies, et qui sont, comme on l'a vu plus haut (XXXVII_8), ($\text{XXXVIII}_{3,4,7}$), liées algébriquement à la fonction $J(\tau)$.

L'étude des fonctions modulaires, qu'il convient de faire re-

---

(¹) Cette dénomination est due à M. Dedekind

monter à M Hermite, a été l'objet de développements considérables, dans lesquels nous ne saurions entrer ici ([1]). En s'affranchissant de la restriction, qui consiste en ce que les nombres a, b, c, d sont rationnels, on entre dans le domaine des recherches qui ont illustré le nom de M. Poincaré, recherches que les travaux de MM. Schwarz, Fuchs, Klein avaient d'ailleurs préparées.

193. L'un des problèmes qui se posent le plus naturellement est celui-ci . étant donnée une fonction modulaire, déterminer le groupe auquel elle appartient. Nous allons l'aborder pour les trois fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$.

Considérons d'abord les trois fonctions

$$A = \chi^{24}(\tau), \qquad B = -\frac{\chi^{24}(\tau)}{\varphi^{24}(\tau)}, \qquad C = -\frac{\chi^{24}(\tau)}{\psi^{24}(\tau)}.$$

On reconnaît tout de suite, en vertu des relations algébriques qui lient les fonctions φ, ψ, χ, qu'elles ne peuvent être égales que pour des valeurs particulières de τ, faisant acquérir aux fonctions φ, ψ, χ certaines valeurs déterminées : comme il est évident, sur leur définition, que ces fonctions ne sont pas des constantes, on voit que les fonctions A, B, C sont, en général, distinctes. Or l'effet des transformations $(\tau \pm 1)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ est de les ranger respectivement dans les ordres

$$\begin{matrix} C, & B, & A, \\ A, & C, & B \end{matrix}$$

Toute transformation linéaire, étant composée avec celles-là, ne pourra donc avoir d'autre effet que de reproduire ces trois fonctions, rangées dans un certain ordre, et chacune d'elles ne peut prendre que trois valeurs quand on effectue sur τ une transformation linéaire quelconque.

([1]) *Voir*, en particulier, les nombreux Mémoires de M Klein dans les *Mathematische Annalen*, et son Livre *Zur Theorie der Modulfunctionen*, ainsi que le Mémoire de M Kiepert dans le *Journal de Crelle*, t 87. M Hurwitz (*Mathematische Annalen*, t XVIII, p 528) a montré comment on peut envisager les fonctions modulaires directement et sans passer par l'intermédiaire des fonctions Thêta

Cela s'accorde avec ce fait que l'on a

$$J(\tau) = \frac{[1-\varphi^8(\tau)\psi^8(\tau)]^3}{\varphi^{16}(\tau)\psi^{16}(\tau)} = \frac{[1-\chi^{24}(\tau)]^3}{\chi^{48}(\tau)}.$$

L'équation du troisième degré en u,

$$(u-1)^3 + J(\tau)u^2 = 0,$$

que vérifie la fonction $\chi^{24}(\tau)$, montre bien, en effet, que cette fonction ne peut prendre que trois valeurs pour les transformations linéaires qui laissent $J(\tau)$ invariable, et les trois racines de cette équation sont précisément A, B, C.

194 Les formules (XLV) montrent clairement que les transformations $(\tau \pm 2)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ laissent la fonction A invariable. Réciproquement, toute transformation linéaire qui laisse A invariable peut être obtenue de cette façon, de sorte que la fonction A appartient au groupe formé en composant les transformations

$$(\tau \pm 2), \quad \left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

de toutes les manières possibles

Supposons, en effet, le symbole de transformation écrit sous la forme

$$\left(\quad , \tau + n_1, -\frac{1}{\tau}, \tau + n_2, -\frac{1}{\tau}, \tau + n_3, \quad . \right)$$

négligeons au commencement, s'il y en a, les termes de la forme $\tau + 2n$, $-\frac{1}{\tau}$, qui laissent A invariable, de sorte que le premier terme du symbole de transformation sera de la forme $\tau + n$ où n est impair; si n n'est pas égal à 1, on le décomposera en deux, $\tau + n - 1$, $\tau + 1$, dont on fera rentrer le premier parmi ceux que l'on néglige et qui laissent A invariable. Les deux premières transformations, $(\tau + 1)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$, changent successivement A en C, puis C en B; vient ensuite un terme de la forme $\tau + n$. Que n soit pair ou impair, la transformation $(\tau + n)$ laisse B invariable, puis vient un terme de la forme $-\frac{1}{\tau}$ qui change B en C, puis un

terme de la forme $\tau + n'$. Que n' soit pair ou impair, nous décomposerons la transformation $(\tau + n')$ en deux, $(\tau - 1)$, $(\tau + n' + 1)$; la transformation $(\tau - 1)$ change C en A, et nous prendrons la transformation $(\tau + n' + 1)$ comme premier terme d'une nouvelle suite dont nous traiterons les termes comme ceux dont nous venons de parler En répétant ainsi le nombre voulu de fois le même raisonnement, on arrive finalement à la conclusion suivante :

Si une transformation linéaire laisse A invariable, son symbole sera formé d'une suite de groupes de termes tels que

$$\tau + 1, \quad -\frac{1}{\tau}, \quad \tau + n, \quad -\frac{1}{\tau}, \quad \tau - 1,$$

groupes de termes qui pourront être précédés, suivis ou séparés les uns des autres par des termes tels que $\tau + 2n$, $-\frac{1}{\tau}$; on peut dire encore que la transformation sera composée de transformations ayant pour symboles

$$(\tau + 2n), \quad \left(-\frac{1}{\tau}\right), \quad \left(\tau + 1, -\frac{1}{\tau}, \tau + n, -\frac{1}{\tau}, \tau - 1\right),$$

où n est un entier pair ou impair, positif ou négatif.

Or la transformation correspondant au dernier symbole revient à remplacer τ par

$$\tau_n = 1 - \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{\tau - 1}} = \frac{(n-1)\tau - n}{n\tau - n - 1};$$

on reconnaît d'ailleurs immédiatement, en adoptant cette notation, que l'on a

$$\tau_{n+1} = \frac{-1}{\tau_n - 2};$$

on aura donc, en supposant n positif,

$$\tau_1 = \frac{-1}{\tau - 2}, \qquad \tau_2 = \frac{-1}{\tau_1 - 2}, \qquad \ldots, \qquad \tau_n = \frac{-1}{\tau_{n-1} - 2}$$

et, par suite,

$$\left(\frac{(n-1)\tau - n}{n\tau - n - 1}\right) = \left(-\frac{1}{\tau}, \tau - 2, -\frac{1}{\tau}, \tau - 2, \quad \right),$$

le symbole du second membre comprenant n termes de la forme $-\frac{1}{\tau}$ et n termes de la forme $\tau-2$. Comme on peut écrire la relation précédente entre τ_n et τ_{n+1},

$$\tau_n = 2 - \frac{1}{\tau_{n+1}},$$

on a aussi

$$\tau_{-1} = 2 - \frac{1}{\tau}, \qquad \tau_{-2} = 2 - \frac{1}{\tau_{-1}}, \qquad \ldots, \qquad \tau_{-n} = 2 - \frac{1}{\tau_{-n+1}}$$

et, par suite, en supposant n négatif,

$$\left(\frac{(n-1)\tau - n}{n\tau - n - 1}\right) = \left(\tau+2, -\frac{1}{\tau}, \tau+2, -\frac{1}{\tau}, \ldots\right),$$

le symbole du second membre comprenant n termes de la forme $\tau+2$ et n termes de la forme $-\frac{1}{\tau}$.

On voit, en résumé, que les transformations qui laissent $\chi^{24}(\tau)$ invariable s'obtiennent en composant les transformations de la forme $(\tau \pm 2)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$, et pourront être représentées par des symboles de la forme

$$\left(\ldots, \tau+2n_1, -\frac{1}{\tau}, \tau+2n_2, -\frac{1}{\tau}, \ldots\right),$$

n_1, n_2, .. étant des nombres entiers positifs ou négatifs; d'ailleurs, le symbole peut être limité à droite et à gauche par des termes de la forme $-\frac{1}{\tau}$ ou $\tau+2n$

195 Les transformations linéaires qui laissent la fonction $\chi(\tau)$ invariable appartiennent certainement à ce type, et, en vertu des relations

$$\chi(\tau+2n) = i^{\frac{n}{6}}\chi(\tau),$$

$$\chi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \chi(\tau),$$

il est clair que l'effet sur la fonction $\chi(\tau)$ de la transformation précédente est de la reproduire multipliée par une puissance de i

dont l'exposant est le sixième de la somme

$$+n_1+n_2+n_3+\ldots$$

Si donc on veut que la transformation laisse $\chi(\tau)$ invariable, il faut et il suffit que cette somme soit un multiple de 24.

196. Puisque l'on a

$$\chi^{24}(\tau)=\varphi^8(\tau)\,\psi^8(\tau)=\varphi^8(\tau)[1-\varphi^8(\tau)],$$

il est clair que les transformations linéaires qui laisseront invariables $\varphi^8(\tau)$ ou $\psi^8(\tau)$, laissant aussi $\chi^{24}(\tau)$ invariable, auront toujours des symboles de la forme

$$\left(\ldots,\ \tau+2n_1,\ -\frac{1}{\tau},\ \tau+2n_2,\ -\frac{1}{\tau},\ \ldots\right),$$

mais comme les transformations de la forme $(\tau+2n)$ n'altèrent ni $\varphi^8(\tau)$ ni $\psi^8(\tau)$, et que les transformations de la forme $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ échangent ces deux fonctions, on voit que si la transformation ne change pas $\varphi^8(\tau)$ ou $\psi^8(\tau)$, son symbole devra contenir le terme $-\frac{1}{\tau}$ un nombre pair de fois. Il suit de là que toutes les transformations cherchées résultent de la composition de transformations ayant des symboles de la forme

$$(\tau+2m),\quad \left(-\frac{1}{\tau},\ \tau+2n,\ -\frac{1}{\tau}\right).$$

On reconnaît sans peine, en répétant le raisonnement du n° 194, que la dernière transformation s'obtient en répétant n fois l'une ou l'autre des deux transformations inverses

$$\left(\frac{\tau}{1-2\tau}\right),\quad \left(\frac{\tau}{1+2\tau}\right),$$

suivant que n est positif ou négatif.

Les transformations qui n'altèrent pas les fonctions $\varphi^8(\tau)$, $\psi^8(\tau)$ pourront donc être représentées par des symboles où figureront, n'importe dans quel ordre, des termes de la forme

$$\tau+2n,\quad \frac{\tau}{1-2\tau},\quad \frac{\tau}{1+2\tau}.$$

197. Les deux dernières transformations n'altèrent pas la fonction $\varphi(\tau)$, tandis que l'effet de la première est de reproduire cette fonction multipliée par $\sqrt{i^n}$. Si donc on veut avoir une transformation linéaire qui n'altère pas $\varphi(\tau)$, il faudra la constituer de la même manière, avec cette condition, que la somme des nombres n qui figurent dans les termes de la forme $\tau + 2n$ soit divisible par 8. On reconnaît, au contraire, que les symboles des transformations qui laissent $\psi(\tau)$ invariable peuvent contenir des termes de la forme $\tau + 2n$ en nombre arbitraire; mais que le nombre des termes de la forme $\frac{\tau}{1 - 2\tau}$, diminué du nombre des termes de la forme $\frac{\tau}{1 + 2\tau}$, doit être divisible par 8.

198. Nous nous proposons maintenant d'établir les formules qui expriment au moyen de $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ les fonctions $\varphi(\mathrm{T})$, $\psi(\mathrm{T})$, $\chi(\mathrm{T})$, en désignant par

$$\mathrm{T} = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}$$

une transformation linéaire quelconque. Ces formules ont été données par M. Hermite ([1]). Tout ce qu'il y a d'essentiel dans l'analyse qui suit est dû à M. Schlafli ([2]).

Les résultats sont différents, suivant que l'on se trouve dans l'un ou l'autre des six cas du Tableau (XX_0). Supposons d'abord que l'on soit dans le cas 1°, en sorte que a, d soient impairs, c et b étant pairs. Cette transformation conservera $\varphi^8(\tau)$, $\psi^8(\tau)$, comme il résulte du Tableau du n° 187; elle aura donc un symbole de la forme

$$\left(\ .\ \tau + a_0,\ -\frac{1}{\tau},\ \tau + a_1,\ -\frac{1}{\tau},\ \ldots\right),$$

les nombres a_0, a_1, ... étant pairs, et le nombre des éléments de

---

([1]) *Comptes rendus*, t XLVI, p 508 et p. 715.

On remarquera que les cas 2° et 5° correspondent respectivement aux cas V et II de M Hermite dans tous nos Tableaux de formules Il y a correspondance complète entre le numérotage des six cas dans les *Formeln und Lehrsatze* de M Schwarz et le nôtre

([2]) *Journal de Crelle*, t LXXII, p 360.

la forme $-\frac{1}{\tau}$ étant pair. Si ce symbole commence ou finit par un terme de la forme $-\frac{1}{\tau}$, on placera au commencement ou à la fin un terme de la forme $\tau + 0$, de manière à obtenir, dans tous les cas, un symbole de la forme

$$\left(\tau + a_0, -\frac{1}{\tau}, \tau + a_1, -\frac{1}{\tau}, \ldots, \tau + a_{2n-1}, -\frac{1}{\tau}, \tau + a_{2n}\right),$$

où tous les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont pairs, le premier et le dernier pouvant seuls être nuls. En groupant ensemble les transformations partielles telles que

$$\left(-\frac{1}{\tau}, \tau + a_1, -\frac{1}{\tau}\right),$$

on peut encore donner au symbole la forme

$$\left(\tau + a_0, \frac{\tau}{1 - a_1\tau}, \tau + a_2, \frac{\tau}{1 - a_3\tau}, \ldots, \tau + a_{2n}\right).$$

Les transformations de la forme $(\tau + a)$ changent $\varphi(\tau)$ en $i^{\frac{a}{4}}\varphi(\tau)$, laissent $\psi(\tau)$ invariable et changent $\chi(\tau)$ en $i^{\frac{a}{12}}\chi(\tau)$; les transformations $\left(\frac{\tau}{1 - a\tau}\right)$ laissent $\varphi(\tau)$ invariable, changent $\psi(\tau)$ en $i^{\frac{a}{4}}\psi(\tau)$ et $\chi(\tau)$ en $i^{\frac{a}{12}}\chi(\tau)$ · si donc on pose

$$A_{2n} = a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n},$$
$$A_{2n-1} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1},$$

on aura

$$\varphi(T) = i^{\frac{A_{2n}}{4}}\varphi(\tau),$$
$$\psi(T) = i^{\frac{A_{2n-1}}{4}}\psi(\tau),$$
$$\chi(T) = i^{\frac{A_{2n}+A_{2n-1}}{12}}\chi(\tau).$$

Nous sommes ainsi amenés à chercher des expressions en fonction de a, b, c, d, de nombres congrus, suivant le module 16, à A_{2n}, à A_{2n-1} et, suivant le module 48, à $A_{2n} + A_{2n-1}$.

199. La première forme du symbole de transformation montre

que l'on a

$$\frac{c+d\tau}{a+b\tau} = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cdots - \cfrac{1}{a_{2n-1} - \cfrac{1}{a_{2n}+\tau}}}}.$$

Désignons par $\frac{p_m}{q_m}$ la réduite de rang $m+1$ de la fraction continue

$$a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cdots - \cfrac{1}{a_{2n}}}},$$

en sorte que l'on ait

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{ll} p_0 = a_0, & q_0 = 1, \\ p_1 = a_0 a_1 - 1, & q_1 = a_1, \\ p_2 = a_0 a_1 a_2 - a_2 - a_0, & q_2 = a_1 a_2 - 1, \\ \cdots & \cdots, \\ p_m = a_m p_{m-1} - p_{m-2}, & q_m = a_m q_{m-1} - q_{m-2}, \\ \multicolumn{2}{c}{q_m p_{m-1} - p_m q_{m-1} = 1} \end{array}\right.$$

L'expression de $\frac{c+d\tau}{a+b\tau}$, sous forme de fraction continue, montre que l'on a

$$\frac{c+d\tau}{a+b\tau} = \frac{(a_{2n}+\tau)p_{2n-1} - p_{2n-2}}{(a_{2n}+\tau)q_{2n-1} - q_{2n-2}} = \frac{p_{2n}+\tau p_{2n-1}}{q_{2n}+\tau q_{2n-1}}$$

et que, par conséquent, au facteur -1 près, les nombres q_{2n}, q_{2n-1}, p_{2n}, p_{2n-1} sont respectivement égaux aux nombres a, b, c, d. Comme on ne change pas la transformation en changeant à la fois les signes de ces quatre nombres, et que, d'autre part, dans les formules finales, figureront seulement des fonctions paires de q_{2n}, q_{2n-1}, p_{2n}, p_{2n-1}, rien n'empêche de supposer

$$\begin{array}{ll} q_{2n} = a, & q_{2n-1} = b, \\ p_{2n} = c, & p_{2n-1} = d \end{array}$$

Il suffit donc d'exprimer A_{2n}, A_{2n-1} par des nombres formés à l'aide des entiers p_{2n}, p_{2n-1}, q_{2n}, q_{2n-1}, à des multiples de 16

près, pour avoir, dans le cas où nous nous sommes placés, les formules de transformation linéaire des fonctions φ et ψ.

200. Supposons les quantités p_r, q_r exprimées explicitement en fonction de $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$: ce seront des polynomes à coefficients $+1$ et -1, où l'on pourra grouper ensemble les termes de même degré D'ailleurs, dans chacune de ces expressions, on n'aura soit que des termes de degré pair, soit que des termes de degré impair, en sorte que, si l'on désigne par A_{2n}, A_{2n-1} ; B_{2n}, B_{2n-1} ; C_{2n}, C_{2n-1} ; D_{2n}, D_{2n-1}, $E_{2n}, E_{2n-1}, \ldots$ des polynomes en $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dont les degrés respectifs sont égaux au rang des lettres A, B, C, D, ... dans l'alphabet, on peut écrire, comme on le voit très aisément,

$$(\beta)\quad \begin{cases} (-1)^n p_{2n} = A_{2n} - C_{2n} + E_{2n} - \ldots, \\ (-1)^n p_{2n-1} = 1 - B_{2n-1} + D_{2n-1} - \ldots, \\ (-1)^n q_{2n} = 1 - B_{2n} + D_{2n} - \ldots, \\ (-1)^n q_{2n-1} = - A_{2n-1} + C_{2n-1} - E_{2n-1} + \ldots \end{cases}$$

A la vérité, le sens des symboles A_{2n}, A_{2n-1} a déjà été fixé ; mais ils gardent leur signification, comme on va le vérifier immédiatement. En substituant, en effet, les valeurs que l'on vient d'écrire dans les égalités

$$\begin{aligned} p_{2n} &= p_{2n-1} a_{2n} - p_{2n-2}, & q_{2n} &= q_{2n-1} a_{2n} - q_{2n-2}, \\ p_{2n-1} &= p_{2n-2} a_{2n-1} - p_{2n-3}, & q_{2n-1} &= q_{2n-2} a_{2n-1} - q_{2n-3}, \end{aligned}$$

on trouve de suite

$$(\gamma)\quad \begin{cases} A_{2n} = A_{2n-2} + a_{2n}, & A_{2n-1} = A_{2n-3} + a_{2n-1}, \\ B_{2n} = A_{2n-1} a_{2n} + B_{2n-2}, & B_{2n-1} = A_{2n-2} a_{2n-1} + B_{2n-3}, \\ C_{2n} = B_{2n-1} a_{2n} + C_{2n-2}, & C_{2n-1} = B_{2n-2} a_{2n-1} + C_{2n-3}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(\delta)\quad \begin{cases} A_{2n} = a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}, \\ A_{2n-1} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}, \\ B_{2n} = A_1 a_2 + A_3 a_4 + \ldots + A_{2n-1} a_{2n}, \\ B_{2n-1} = A_0 a_1 + A_2 a_3 + \ldots + A_{2n-2} a_{2n-1}, \\ C_{2n} = B_1 a_2 + B_3 a_4 + \ldots + B_{2n-1} a_{2n}, \\ C_{2n-1} = \qquad B_2 a_3 + \ldots + B_{2n-2} a_{2n-1} \end{cases}$$

D'ailleurs, puisque les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont pairs, on a certainement, quel que soit l'indice r,

$$A_r \equiv 0 \pmod{2}, \qquad B_r \equiv 0 \pmod{4}, \qquad C_r \equiv 0 \pmod{8},$$

et les nombres D_r, E_r, ... sont évidemment divisibles par 16, en sorte que les égalités (β) entraînent les congruences (mod. 16)

$$(\varepsilon) \qquad \begin{cases} (-1)^n p_{2n} \equiv A_{2n} - C_{2n}, \\ (-1)^n p_{2n-1} \equiv 1 - B_{2n-1}, \\ (-1)^n q_{2n} \equiv 1 - B_{2n}, \\ (-1)^n q_{2n-1} \equiv - A_{2n-1} + C_{2n-1} \end{cases}$$

L'avant-dernière des égalités (δ) peut s'écrire

$$\begin{aligned} C_{2n} &= (A_2 - A_0) B_1 + (A_4 - A_2) B_3 + \ldots + (A_{2n} - A_{2n-2}) B_{2n-1} \\ &= - A_0 B_1 - A_2 (B_3 - B_1) - \ldots - A_{2n-2} (B_{2n-1} - B_{2n-3}) + A_{2n} B_{2n-1} \end{aligned}$$

Si, dans le dernier membre, on remplace pour chacun des indices $r = 2, 3, \ldots, n$, la différence $B_{2r-1} - B_{2r-3}$ par sa valeur $A_{2r-2} a_{2r-1}$ et B_1 par $a_0 a_1 = A_0 a_1$, il vient

$$C_{2n} = - a_1 A_0^2 - a_3 A_2^2 - \ldots - a_{2n-1} A_{2n-2}^2 + A_{2n} B_{2n-1}$$

D'ailleurs on a, en général,

$$a_{2r-1} A_{2r-2}^2 \equiv 2 a_{2r-1} A_{2r-2} \pmod{16},$$

en effet, la différence $a_{2r-1} A_{2r-2} (A_{2r-2} - 2)$ entre les deux membres est divisible par 16, puisque a_{2r-1} est pair et que le produit des deux nombres pairs consécutifs A_{2r-2}, $A_{2r-2} - 2$ est divisible par 8. Ainsi, en négligeant les multiples de 16, la quantité $a_1 A_0^2 + a_3 A_2^2 + \ldots + a_{2n-1} A_{2n-2}^2$ peut être remplacée par

$$2 (a_1 A_0 + a_3 A_2 + \ldots + a_{2n-1} A_{2n-2}) = 2 B_{2n-1},$$

on a donc

$$C_{2n} \equiv - 2 B_{2n-1} + A_{2n} B_{2n-1} \pmod{16}.$$

On démontre exactement de la même façon la congruence

$$C_{2n-1} \equiv - 2 B_{2n-2} + A_{2n-1} B_{2n-2} \pmod{16}$$

Ces deux congruences permettent d'écrire la première et la dernière des congruences (ε) sous la forme

$$(\eta)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^n p_{2n} &\equiv A_{2n} + 2B_{2n-1} - A_{2n}B_{2n-1}, \\ (-1)^n q_{2n-1} &\equiv -A_{2n-1} - 2B_{2n-2} + A_{2n-1}B_{2n-2} \end{aligned}\right\} \pmod{16}.$$

Dans le second membre de la première de ces congruences, on peut remplacer B_{2n-1} par $1-(-1)^n p_{2n-1}$, puisque les deux quantités ne diffèrent que par un multiple de 16 De même, dans le second membre de la deuxième, on peut remplacer B_{2n-2} par $1+(-1)^n q_{2n-2}$

D'autre part, l'égalité

$$q_{2n} = a_{2n} q_{2n-1} - q_{2n-2}$$

montre, en tenant compte de la dernière congruence (ε) et de la congruence $C_{2r-1} \equiv 0$ (mod. 8), que l'on a

$$q_{2n} \equiv -q_{2n-2} - (-1)^n a_{2n} A_{2n-1}$$

Si le nombre pair A_{2n-1} est divisible par 4, on a donc

$$q_{2n} \equiv -q_{2n-2} \pmod{8},$$

mais, dans la seconde congruence (η), B_{2n-2} est multiplié par le nombre pair $A_{2n-1}-2$; on peut donc négliger dans l'expression de B_{2n-2} les multiples de 8, et, par conséquent, remplacer B_{2n-2} par $1-(-1)^n q_{2n}$. Si A_{2n-1} était divisible par 2 sans l'être par 4, le facteur $A_{2n-1}-2$ serait divisible par 4, et l'on pourrait négliger dans l'expression de B_{2n-2} les multiples de 4, comme a_{2n}, A_{2n-1} sont pairs tous deux, on a toujours

$$q_{2n} \equiv -q_{2n-2} \pmod{4},$$

on voit donc que l'on peut encore remplacer B_{2n-2} par $1-(-1)^n q_{2n}$.

Dès lors, les deux congruences (η) conduisent aux suivantes

$$\left.\begin{aligned} (-1)^n p_{2n} &\equiv A_{2n} + (2-A_{2n})[1-(-1)^n p_{2n-1}] \\ (-1)^n q_{2n-1} &\equiv -A_{2n-1} - (2-A_{2n-1})[1-(-1)^n q_{2n}] \end{aligned}\right\} \pmod{16},$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} A_{2n}\ p_{2n-1} &\equiv \quad p_{2n} \quad + 2[p_{2n-1} - (-1)^n] \\ A_{2n-1} q_{2n} &\equiv - q_{2n-1} + 2[q_{2n} \quad - (-1)^n] \end{aligned}\right\} \pmod{16}$$

Multiplions ces deux congruences respectivement par p_{2n-1}, q_{2n}; si l'on remarque que, en vertu des congruences (ε) et de la congruence $B_r \equiv 0$ (mod. 4), on a

$$\left.\begin{aligned} p_{2n-1}^2 &\equiv 1 \\ q_{2n}^2 &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \pmod{8},$$

d'où, puisque A_{2n}, A_{2n-1} sont pairs,

$$\left.\begin{aligned} A_{2n}\ p_{2n-1}^2 &\equiv A_{2n} \\ A_{2n-1} q_{2n}^2 &\equiv A_{2n-1} \end{aligned}\right\} \pmod{16},$$

on voit que l'on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} A_{2n} &\equiv \quad p_{2n}\, p_{2n-1} + p_{2n-1}^2 + p_{2n-1}^2 - 2(-1)^n p_{2n-1} \\ A_{2n-1} &\equiv - q_{2n}\, q_{2n-1} + q_{2n}^2 \quad + q_{2n}^2 \quad - 2(-1)^n q_{2n} \end{aligned}\right\} \pmod{16}.$$

Les seconds membres se réduisent, en tenant compte des congruences,

$$\left.\begin{aligned} [1 - (-1)^n p_{2n-1}]^2 &\equiv 0 \\ [1 - (-1)^n q_{2n}]^2 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{16},$$

qui résultent manifestement des congruences (ε) et de la congruence $B_r^2 \equiv 0$ (mod. 16), et l'on a finalement

$$\left.\begin{aligned} A_{2n} &\equiv \quad p_{2n} p_{2n-1} + p_{2n-1}^2 - 1 \\ A_{2n-1} &\equiv - q_{2n} q_{2n-1} + q_{2n}^2 \quad - 1 \end{aligned}\right\} \pmod{16},$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned} A_{2n} &\equiv \quad cd + d^2 - 1 \\ A_{2n-1} &\equiv - ab + a^2 - 1 \end{aligned}\right\} \pmod{16}$$

201. Nous transformerons ces expressions de A_{2n}, A_{2n-1} au moyen des congruences

$$\left.\begin{aligned} (a-d)(a+d+c) &\equiv 0 \\ (a-d)(a+d+b) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{16},$$

qui peuvent s'établir comme il suit.

Écrivons les premiers membres sous la forme

$$(q_{2n}-p_{2n-1})(q_{2n}+p_{2n-1}+p_{2n}),$$
$$(q_{2n}-p_{2n-1})(q_{2n}+p_{2n-1}+q_{2n-1}).$$

En tenant compte des congruences (ε), on voit que les deux quantités précédentes sont respectivement congrues (mod. 16) à

$$(B_{2n-1}-B_{2n})(2+A_{2n}),$$
$$(B_{2n-1}-B_{2n})(2-A_{2n-1})$$

Il nous suffit donc de montrer que ces deux quantités sont divisibles par 16.

Pour la première, il n'y a évidemment lieu à démonstration que si l'on avait à la fois

$$B_{2n-1}-B_{2n}\equiv 4 \quad (\text{mod. } 8),$$
$$A_{2n}\equiv 0 \quad (\text{mod. } 4),$$

mais, si l'on écrit la première de ces deux congruences sous la forme équivalente

$$B_{2n-1}+B_{2n}\equiv 4 \quad (\text{mod. } 8),$$

on aperçoit tout de suite qu'elle est incompatible avec la seconde; car on tire de l'égalité

$$q_{2n}p_{2n-1}-p_{2n}q_{2n-1}=1,$$

et des congruences (ε) la suivante

$$B_{2n-1}+B_{2n}\equiv A_{2n}A_{2n-1} \quad (\text{mod. } 16),$$

et cette dernière montre que, si A_{2n} est divisible par 4, $B_{2n-1}+B_{2n}$ est divisible par 8.

On déduit aussi de la dernière congruence que l'on ne peut avoir à la fois

$$B_{2n-1}-B_{2n}\equiv 4 \quad (\text{mod. } 8),$$
$$A_{2n-1}\equiv 0 \quad (\text{mod } 4),$$

et les congruences annoncées sont établies.

Puisque $a-d$ est divisible par 4, que b et c sont pairs, il est

clair que ces congruences entraînent les suivantes :

$$(\zeta)\qquad \left.\begin{array}{l}(a-d)(a+d\pm c)\equiv 0\\(a-d)(a+d\pm b)\equiv 0\end{array}\right\}\pmod{16},$$

on en tire

$$\left.\begin{array}{l}a^2\pm ac\equiv d^2\pm cd\\a^2\pm ab\equiv d^2\pm bd\end{array}\right\}\pmod{16},$$

où les signes supérieurs se correspondent.

Les deux expressions de A_{2n}, A_{2n-1} peuvent donc aussi s'écrire

$$\left.\begin{array}{l}A_{2n}\ \equiv\ \ cd+d^2-1\equiv\ \ ac+a^2-1\\A_{2n-1}\equiv -ab+a^2-1\equiv -bd+d^2-1\end{array}\right\}\pmod{16}$$

et l'on a, par suite, dans le cas 1° du Tableau (XX_0), les relations

$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=i^{\frac{cd+d^2-1}{4}}\varphi(\tau)=i^{\frac{ac+a^2-1}{4}}\varphi(\tau),$$

$$\psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=i^{\frac{-ab+a^2-1}{4}}\psi(\tau)=i^{\frac{-bd+d^2-1}{4}}\psi(\tau)$$

202. Il est facile de vérifier que, dans chacun des cas 2° à 6° du Tableau (XX_0), la transformation T peut être envisagée comme composée de transformations $(\tau+1)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ et de transformations rentrant dans le premier cas. Cela résulte du Tableau suivant, où l'on a écrit, à gauche, le numéro correspondant du Tableau (XX_0), et où, dans le second membre, figurent chaque fois dans l'ordre voulu les transformations qui, par combinaison, donnent la transformation T.

2° $$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\left(\frac{c-d+d\tau}{a-b+b\tau},\ \tau+1\right),$$

3° $$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\left(\frac{c+(d-c)\tau}{a+(b-a)\tau},\ \tau+1,\ -\frac{1}{\tau},\ \tau+1\right),$$

4° $$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\left(\frac{d+(d-c)\tau}{b+(b-a)\tau},\ -\frac{1}{\tau},\ \tau+1\right),$$

5° $$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\left(\frac{d-c\tau}{b-a\tau},\ -\frac{1}{\tau}\right),$$

6° $$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\left(\frac{d+c-c\tau}{b+a-a\tau},\ \tau+1,\ -\frac{1}{\tau}\right).$$

On voit bien, en tenant compte de la parité des nombres a, b, c, d dans chacun des cinq cas considérés, qu'outre $(\tau+1)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$, les transformations qui paraissent dans le second membre rentrent dans le premier cas. Les transformations $(\tau+1)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ changent d'ailleurs $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ en combinaisons de ces fonctions que font connaître les formules (XLV).

203. A l'aide de cette remarque et des formules établies au n° 201 pour $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ dans le premier cas du Tableau (XX_0), on obtiendra sans peine les mêmes formules dans les cinq autres cas de ce Tableau.

Prenons, par exemple, le cas 4° . a, b, c sont impairs, d est pair; la première transformation est $\tau' = \frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}$, en supposant $\alpha = b$, $\beta = b-a$, $\gamma = d$, $\delta = d-c$. On vérifie bien que α, β, γ, δ sont les coefficients d'une transformation qui appartient au cas 1°; on a donc

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right) = i^{\frac{\gamma\delta+\delta^2-1}{4}}\varphi(\tau) = i^{\frac{\alpha\gamma+\alpha^2-1}{4}}\varphi(\tau),$$

en remplaçant τ par $-\frac{1}{\tau}$, on a ensuite

$$\varphi\left(\frac{c-d+d\tau}{a-b+b\tau}\right) = i^{\frac{(d-c)(2d-c)-1}{4}}\psi(\tau) = i^{\frac{bd+b^2-1}{4}}\psi(\tau),$$

puis, en remplaçant τ par $\tau+1$,

$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{(d-c)(2d-c)-1}{4}}\frac{1}{\psi(\tau)} = i^{\frac{bd+b^2-1}{4}}\frac{1}{\psi(\tau)}$$

D'ailleurs, $d-c$ étant impair, on a la congruence

$$2(d-c)^2 \equiv 2 \pmod{16},$$

d'où l'on déduit facilement la congruence

$$(d-c)(2d-c\; -1 \equiv c(d-c)+1 \pmod{16},$$

on a donc finalement, dans le cas 4°,

$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{cd-c^2+1}{4}} \frac{1}{\psi(\tau)} = i^{\frac{bd+b^2-1}{4}} \frac{1}{\psi(\tau)}.$$

En répétant les mêmes opérations dans les quatre autres cas du Tableau (XX_6), on obtient des formules analogues, et l'on a finalement pour la fonction $\varphi(\tau)$, dans les six cas de ce Tableau, les formules de transformation suivantes :

1°
$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{cd+d^2-1}{4}} \varphi(\tau) = i^{\frac{ac+a^2-1}{4}} \varphi(\tau),$$

2°
$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{cd}{4}} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} = i^{\frac{(a-b)(a-b+c-d)}{4}} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

3°
$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{-cd+d^2-1}{4}} \frac{1}{\varphi(\tau)} = i^{\frac{ac+a^2-1}{4}} \frac{1}{\varphi(\tau)},$$

4°
$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{cd-c^2+1}{4}} \frac{1}{\psi(\tau)} = i^{\frac{bd+b^2-1}{4}} \frac{1}{\psi(\tau)},$$

5°
$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{-cd+c^2-1}{4}} \psi(\tau) = i^{\frac{bd+b^2-1}{4}} \psi(\tau),$$

6°
$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{-\frac{cd}{4}} \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)} = i^{\frac{(a+b)(a+b+c+d)}{4}} \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}.$$

204. Il n'est pas nécessaire, pour obtenir ces formules, de ramener, comme nous venons de l'expliquer, chacun des six cas au premier.

Nous avons vu au n° 202 que l'on peut envisager la transformation $\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$ du cas 4°, où a, b, c sont impairs et d pair, comme composée de la transformation $\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)$, où $\alpha=b$, $\delta=d-c$ sont impairs, tandis que $\beta=b-a$, $\gamma=d$ sont pairs, transformation qui rentre donc dans le cas 1°, et de la transformation $\left(-\frac{1}{\tau+1}\right)$. On peut de même envisager la transformation $\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$ du cas 6°, où a est pair, tandis que b, c, d sont impairs, comme composée de la transformation $\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)$, où $\alpha=b$, $\beta=b-a$,

$\gamma = d$ sont impairs, tandis que $\delta = d - c$ est pair, transformation qui rentre donc dans le cas 4°, et de la transformation $\left(-\frac{1}{1+\tau}\right)$, de sorte que l'on a, dans le cas 6°, non seulement la décomposition de la transformation (τ) donnée au n° 202 en une transformation qui rentre dans le cas 1°, suivie des transformations $(\tau+1)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$, mais aussi la décomposition

$$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \left(\frac{d+(d-c)\tau}{b+(b-a)\tau}, -\frac{1}{\tau}, \tau+1\right)$$

de cette transformation (τ) en une transformation qui rentre dans le cas 4°, suivie de la transformation $\left(-\frac{1}{\tau+1}\right)$.

On verrait exactement de la même manière que l'on peut envisager les transformations $\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$ des cas 1°, 3°, 5°, 2° comme résultant de la composition d'une transformation $\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)$, où $\alpha = b$, $\beta = b - a$, $\gamma = d$, $\delta = d - c$, transformation qui rentre respectivement dans les cas 6°, 2°, 3°, 5°, et de la transformation $\left(-\frac{1}{\tau+1}\right)$.

Observons d'ailleurs, sur l'exemple du numéro précédent, que la formule pour $\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$ s'obtient, dans le cas 4°, à l'aide de la formule pour $\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$, supposée connue dans le cas 1°, en changeant dans cette dernière formule simultanément a, b, c, d, τ en b, $b-a$, d, $d-c$, $-\frac{1}{1+\tau}$. Les mêmes changements simultanés permettront donc aussi, lorsqu'on connaîtra une des formules relatives aux cas 4°, ou 6°, ou 2°, ou 3°, ou 5°, d'écrire immédiatement la formule relative respectivement aux cas 6°, ou 1°, ou 3°, ou 5°, ou 2°. Il suffit donc d'avoir les formules relatives aux cas 1° et 5°, par exemple, pour avoir toutes les autres.

Le même raisonnement s'applique aux diverses décompositions indiquées dans le n° 202. Le Tableau suivant résume les résultats et permet de passer des formules qui concernent l'un quelconque des cas du Tableau (XX_0) à celles qui concernent les autres cas. Dans les cinq premières lignes on a écrit, à côté des lettres a, b, c, d, τ, les expressions qui doivent les remplacer, en regard de

ces expressions et à côté des n^{os} 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, on trouve les numéros des cas qui remplacent respectivement ces six cas.

a	$a-b$	a	b	b	$a+b$
b	b	$b-a$	$b-a$	$-a$	$-a$
c	$c-d$	c	d	d	$c+d$
d	d	$d-c$	$d-c$	$-c$	$-c$
τ	$\tau+1$	$\dfrac{\tau}{\tau+1}$	$-\dfrac{1}{\tau+1}$	$-\dfrac{1}{\tau}$	$\dfrac{\tau-1}{\tau}$
1°	2°	3°	4°	5°	6°
2°	1°	4°	3°	6°	5°
3°	6°	1°	5°	4°	2°
4°	5°	2°	6°	3°	1°
5°	4°	6°	2°	1°	3°
6°	3°	5°	1°	2°	4°

205. Les formules relatives à la transformation linéaire de la fonction $\psi(\tau)$ pourraient s'établir exactement de la même manière; le Tableau précédent s'applique aussi bien à la fonction $\psi(\tau)$ qu'à la fonction $\varphi(\tau)$.

D'ailleurs, on peut passer directement des formules relatives à la fonction $\varphi(\tau)$ à celles qui concernent la fonction $\psi(\tau)$ par la

remarque suivante, que nous développerons sur le cas 1° Dans la formule

$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{cd+d^2-1}{4}}\varphi(\tau) = i^{\frac{ac+a^2-1}{4}}\varphi(\tau),$$

changeons τ en $-\frac{1}{\tau}$, elle devient

$$\varphi\left(\frac{-d+c\tau}{-b+a\tau}\right) = i^{\frac{cd+d^2-1}{4}}\psi(\tau) = i^{\frac{ac+a^2-1}{4}}\psi(\tau)$$

Si l'on applique au premier membre de cette formule la relation

$$\varphi(\mathrm{T}) = \psi\left(-\frac{1}{\mathrm{T}}\right),$$

en supposant $\mathrm{T} = \dfrac{-d+c\tau}{-b+a\tau}$, on trouve

$$\psi\left(\frac{b-a\tau}{-d+c\tau}\right) = i^{\frac{cd+d^2-1}{4}}\psi(\tau) = i^{\frac{ac+a^2-1}{4}}\psi(\tau)$$

Si l'on remplace maintenant a, b, c, d par $-d, c, b, -a$, ce qui nous laisse dans le cas 1°, on obtient les formules

$$\psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{-ab+a^2-1}{4}}\psi(\tau) = i^{\frac{-bd+d^2-1}{4}}\psi(\tau),$$

qui sont bien celles du n° **201**.

En raisonnant de la même façon, on voit que si l'on change a, b, c, d en $-d, c, b, -a$ et simultanément φ en ψ et ψ en φ, chaque formule relative à la fonction φ conduit à une formule relative à la fonction ψ; mais on ne reste pas toujours dans le même cas du Tableau (XX_6), on reconnaît facilement que l'on passe des cas 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6° aux cas 1°, 3°, 2°, 6°, 5°, 4°.

On obtient ainsi pour la fonction $\psi(\tau)$, dans les six cas du Tableau (XX_6) les formules de transformation linéaire suivantes

1° $$\psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{-ab+a^2-1}{4}}\psi(\tau) = i^{\frac{-bd+d^2-1}{4}}\psi(\tau),$$

2° $$\psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{ab+a^2-1}{4}}\frac{1}{\psi(\tau)} = i^{\frac{-bd+d^2-1}{4}}\frac{1}{\psi(\tau)},$$

$$3° \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{-\frac{ab}{4}}\frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)} = i^{\frac{(c+d)(-a-b+c+d)}{4}}\frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)},$$

$$4° \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{ab}{4}}\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} = i^{\frac{(c-d)(-a+b+c-d)}{4}}\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

$$5° \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{ab+b^2-1}{4}}\varphi(\tau) = i^{\frac{-ac+c^2-1}{4}}\varphi(\tau),$$

$$6° \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{-ab}{4}-\frac{b^2+1}{4}}\frac{1}{\varphi(\tau)} = i^{\frac{-ac}{4}+\frac{c^2-1}{4}}\frac{1}{\varphi(\tau)}.$$

206. Nous récrirons ci-dessous les formules relatives aux fonctions $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$, en ne conservant d'ailleurs, pour chacune d'elles, qu'une seule forme. Le symbole $\left(\frac{2}{n}\right)$, où n est un entier impair, est emprunté à l'Arithmétique; nous aurons l'occasion d'y revenir au n° 228; il est mis à la place de $i^{\frac{n^2-1}{4}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$. Nous rappelons encore une fois que $i^{\frac{m}{n}}$, où m est un entier quelconque et n un entier positif, est mis à la place de $e^{\frac{m\pi i}{2n}}$.

(XLV₁₁)

	$\varphi(\tau)$	$\psi(\tau)$
1°	$\left(\frac{2}{d}\right)i^{\frac{cd}{4}}\varphi(\tau)$	$\left(\frac{2}{a}\right)i^{-\frac{ab}{4}}\psi(\tau)$
2°	$i^{\frac{cd}{4}}\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}$	$\left(\frac{2}{a}\right)i^{\frac{ab}{4}}\frac{1}{\psi(\tau)}$
3°	$\left(\frac{2}{d}\right)i^{-\frac{cd}{4}}\frac{1}{\varphi(\tau)}$	$i^{-\frac{ab}{4}}\frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}$
4°	$\left(\frac{2}{c}\right)i^{\frac{cd}{4}}\frac{1}{\psi(\tau)}$	$i^{\frac{ab}{4}}\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}$
5°	$\left(\frac{2}{c}\right)i^{-\frac{cd}{4}}\psi(\tau)$	$\left(\frac{2}{b}\right)i^{\frac{ab}{4}}\varphi(\tau)$
6°	$i^{-\frac{cd}{4}}\frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}$	$\left(\frac{2}{b}\right)i^{-\frac{ab}{4}}\frac{1}{\varphi(\tau)}$

207. Il est à peu près inutile de dire que les différentes façons dont on parvient à ces formules donnent naissance à une suite de congruences (mod. 16) entre les nombres a, b, c, d, relatives aux différents cas du Tableau (XX_6) Par exemple, dans le cas 3°, on a, entre autres congruences, les suivantes

$$\left.\begin{array}{c} (d+a)(d-a-c) \equiv 0, \\ (c+d)(-a-b+c+d)+ab \equiv 0, \\ c(a+2b+c+d) \equiv 0, \\ d(-a+b+c+d) \equiv b(a-c), \\ (a+c)(a+2c) \equiv d(c+d) \equiv 1+b(a-d), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\cdot \end{array}\right\} \pmod{16}$$

Elles peuvent être vérifiées en distinguant les nombres entiers a, b, c, d suivant leur reste modulo 4 Quelques-unes d'entre elles se déduisent d'ailleurs des autres en ne distinguant ces nombres entiers que suivant leurs restes modulo 2

En tenant compte, dans chacun des six cas du Tableau (XX_6), des congruences correspondantes, on peut mettre les formules de transformation linéaire des fonctions $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ sous plusieurs formes équivalentes à celles des Tableaux précédents. Ainsi, dans le cas 3°, on a, par exemple,

$$\psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \left(\frac{2}{d}\right) i^{-\frac{(c+b)d}{4}} \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}.$$

208. Pour obtenir les formules de transformation linéaire concernant la fonction $\chi(\tau)$ dans le cas 1° du Tableau (XX_6), nous suivrons une méthode moins directe que pour les fonctions $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$.

Rappelons tout d'abord que, dans ce cas 1°, on a

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{\lambda}{12}} \chi(\tau),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\lambda = \mathrm{A}_{2n} + \mathrm{A}_{2n-1},$$

quand nous voudrons mettre en évidence les nombres a, b, c, d

dont dépend λ, nous écrirons, au lieu de λ,

$$\lambda\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}.$$

Observons aussi qu'en remplaçant, dans l'égalité

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{\lambda}{12}}\chi(\tau),$$

τ par $\tau + 2n$ ou par $\frac{\tau}{1-2n\tau}$, on aura

$$\chi\left(\frac{c+2nd+d\tau}{a+2nb+b\tau}\right) = i^{\frac{\lambda}{12}}\chi(\tau+2n) = i^{\frac{\lambda+2n}{12}}\chi(\tau),$$

$$\chi\left(\frac{c+(d-2nc)\tau}{a+(b-2na)\tau}\right) = i^{\frac{\lambda}{12}}\chi\left(\frac{\tau}{1-2n\tau}\right) = i^{\frac{\lambda+2n}{12}}\chi(\tau)$$

et, par suite,

$$(\eta)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda\begin{pmatrix} a+2nb, & b \\ c+2nd, & d \end{pmatrix} &\equiv \lambda\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} + 2n \\ \lambda\begin{pmatrix} a, & b-2na \\ c, & d-2nc \end{pmatrix} &\equiv \lambda\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} + 2n \end{aligned}\right\} \pmod{48}$$

Inversement, si l'on détermine une fonction entière à coefficients entiers λ qui vérifie ces deux congruences, quel que soit le nombre pair $2n$, pourvu que a, b, c, d soient des nombres satisfaisant aux conditions du cas 1°, et qui, enfin, se réduise à zéro dans le cas où a, b, c, d sont les coefficients de la transformation identique, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \qquad d = 1,$$

il est clair que cette fonction λ pourra être prise pour la fonction λ qui vérifie l'égalité

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{\lambda}{12}}\chi(\tau).$$

En effet, toute transformation du cas 1° peut être obtenue en faisant suivre la transformation identique d'un certain nombre de transformations de la forme $(\tau + 2n)$ ou $\left(\frac{\tau}{1-2n\tau}\right)$

209. Nous commencerons par déterminer une fonction L de

a, b, c, d qui vérifie les congruences (η) suivant le module 16; nous transformerons ensuite cette fonction L en une autre qui lui soit congrue suivant le module 16 et qui vérifie les congruences (η) suivant le module 3; cette dernière fonction pourra être alors prise pour λ, car elle vérifiera manifestement les congruences (η) suivant le module 48.

Comme les formules de transformation des fonctions $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ dans le cas 1° du Tableau (XX_6),

$$(\zeta)\qquad \begin{cases} \varphi(T) = i^{\frac{cd+d^2-1}{4}}\varphi(\tau), \\ \psi(T) = i^{\frac{-ab+a^2-1}{4}}\psi(\tau), \end{cases}$$

donnent immédiatement pour l'exposant λ de la formule de transformation

$$\chi(T) = i^{\frac{\lambda}{12}}\chi(\tau),$$

la valeur

$$\lambda \equiv (cd+d^2-1)+(-ab+a^2-1) \pmod{16},$$

il est naturel de se demander si en prenant pour L l'expression $cd - ab + d^2 + a^2 - 2$, les congruences (η) sont vérifiées suivant le module 16

On le voit immédiatement, dans le cas où le nombre pair $2n$ est divisible par 4. En remplaçant alors τ par $\tau + n$ dans les égalités (ζ), on obtient les relations

$$\varphi\left(\frac{c+nd+d\tau}{a+nb+b\tau}\right) = i^{\frac{(c+nd)d+d^2-1}{4}}\varphi(\tau+n) = i^{\frac{(c+nd)d+d^2-1+n}{4}}\varphi(\tau),$$

$$\psi\left(\frac{c+nd+d\tau}{a+nb+b\tau}\right) = i^{\frac{-(a+nb)b+(a+nb)^2-1}{4}}\psi(\tau)$$

Si donc on prend pour L l'expression

$$(cd+d^2-1)+(-ab+a^2-1)$$

et si l'on désigne par L_1 ce que devient L lorsqu'on change τ en $\tau+n$, on a l'égalité

$$L_1 - L = n[d^2+1-b^2+2ab+nb^2]$$

De même, en remplaçant, dans les égalités (ζ), τ par $\frac{\tau}{1-n\tau}$ et

en désignant par L_2 ce que devient alors L, on a l'égalité

$$L_2 - L = n(-c^2 - 2cd + nc^2 + a^2 + 1)$$

De ces deux égalités on déduit immédiatement, puisque n, b, c sont pairs et a, d impairs, les congruences

$$\left.\begin{array}{l} L_1 - L \equiv 2n \\ L_2 - L \equiv 2n \end{array}\right\} \pmod{16},$$

qui mettent bien en évidence que les congruences (η) sont vérifiées, suivant le module 16, en prenant $\lambda = L$.

Ainsi, dans le cas où n est pair, toute fonction congrue à $cd - ab + a^2 + d^2 - 2$, suivant le module 16, et s'annulant pour $a = 1$, $d = 1$, $b = 0$, $c = 0$, pourra être prise pour λ, si elle vérifie les congruences (η) suivant le module 3.

Or, en vertu des diverses valeurs trouvées pour A_{2n}, A_{2n-1}, on a les congruences

$$L \equiv d(c - b) + 2(d^2 - 1) \equiv a(c - b) + 2(a^2 - 1) \pmod{16},$$

et, par suite, puisque a et d sont impairs,

$$L \equiv d(c - b) \equiv a(c - b) \pmod{16}$$

D'un autre côté on a, à cause de l'égalité $ad - bc = 1$, les congruences

$$\left.\begin{array}{l} d(bc + 1) - a = (d^2 - 1)a \equiv 0 \\ a(bc + 1) - d = (a^2 - 1)d \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{8},$$

d'où l'on déduit, en multipliant par le nombre pair $b - c$,

$$\left.\begin{array}{l} (b - c)(bcd - a) + d(b - c) \equiv 0 \\ (b - c)(abc - d) + a(b - c) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{16}.$$

On a donc aussi les congruences

$$L \equiv (b - c)(bcd - a) \equiv (b - c)(abc - d) \pmod{16}$$

D'ailleurs les deux fonctions

$$(b - c)(bcd - a), \quad (b - c)(abc - d)$$

sont congrues suivant le module 3; en effet leur différence est

$$(b - c)(a - d)(bc + 1) = (b - c)(a - d)ad,$$

et l'un des facteurs $b-c$, $a-d$, a, d est nécessairement divisible par 3, car s'il en était autrement il faudrait que l'on eût à la fois

$$a=\varepsilon, \qquad b=\varepsilon', \qquad c=-\varepsilon', \qquad d=-\varepsilon,$$

ε, ε' étant égaux à ± 1; on en déduirait

$$1=ad-bc=-\varepsilon^2+\varepsilon'^2\equiv 0 \pmod{3},$$

ce qui est absurde.

On aura donc vérifié que, pour n pair, l'une ou l'autre des deux fonctions $(b-c)(abc-d)$, $(b-c)(bcd-a)$ peut être prise pour la fonction $\lambda\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d\end{pmatrix}$, si l'on constate que l'une ou l'autre de ces fonctions satisfait aux congruences

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\begin{pmatrix} a+2nb, & b \\ c+2nd, & d\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d\end{pmatrix}-2n\equiv 0 \\ \lambda\begin{pmatrix} a, & b-2na \\ c, & d-2nc\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d\end{pmatrix}-2n\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{3}$$

La vérification de ces deux congruences est particulièrement aisée, si l'on fait porter la démonstration sur $(b-c)(bcd-a)$ pour la première, sur $(b-c)(abc-d)$ pour la seconde On a alors à établir les deux congruences, suivant le module 3,

$$(b-c-2nd)[bdc-a+2nb(d^2-1)]-(b-c)(bdc-a)-2n\equiv 0,$$
$$(b-c-2na)[abc-d-2nc(a^2-1)]-(b-c)(abc-d)-2n\equiv 0,$$

ou, en supposant n premier à 3,

$$-2nbd(d^2-1)-d(bdc-a)+b(b-c)(d^2-1)-1\equiv 0,$$
$$+2nac(a^2-1)-a(abc-d)-c(b-c)(a^2-1)-1\equiv 0,$$

or les nombres $d(d^2-1)$, $a(a^2-1)$ sont divisibles par 3 puisque ce sont des produits de trois nombres entiers consécutifs, on a donc à établir les deux congruences

$$\left.\begin{array}{l} -d(bdc-a)+b(b-c)(d^2-1)-1\equiv 0 \\ -a(abc-d)-c(b-c)(a^2-1)-1\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{3}$$

En retranchant des deux membres la quantité $ad-bc-1$,

elles prennent la forme

$$\left.\begin{array}{r} b(b-2c)(d^2-1)\equiv 0 \\ c(c-2b)(a^2-1)\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{3},$$

ou

$$\left.\begin{array}{r} b(b+c)(d^2-1)\equiv 0 \\ c(b+c)(a^2-1)\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{3}$$

Si a est divisible par 3 ou si d est divisible par 3, l'égalité $ad-bc=1$ montre que l'on a

$$bc\equiv -1 \pmod{3},$$

d'où l'on conclut que $b+c$ est divisible par 3. La vérification annoncée est donc faite.

210. Nous nous sommes bornés jusqu'ici à considérer le cas où le nombre pair $2n$ est divisible par 4; mais il se peut que n soit impair et dans ce cas la démonstration précédente est en défaut, comme on le voit en observant qu'alors les substitutions $T=\tau+n$ et $T=\dfrac{\tau}{1-n\tau}$ ne rentrent pas dans celles du cas 1° du Tableau (XX_0).

Il nous reste donc encore à vérifier que, pour n *impair*, les congruences (η) ont lieu suivant le module 48 lorsque l'on prend pour λ successivement chacune des deux expressions

$$(b-c)(bcd-a), \quad (b-c)(abc-d)$$

La démonstration est la même que tout à l'heure, lorsque l'on envisage les congruences (η) suivant le module 3; il suffit donc de vérifier que l'on a, pour n impair, les quatre congruences, prises toutes quatre suivant le module 16,

$$\begin{array}{l} (b-c-2nd)[bd(c+2nd)-(a+2nb)]-(b-c)(bdc-a)-2n\equiv 0, \\ (b-c-2na)[(b-2na)(d-2nc)c-a]-(b-c)(bdc-a)-2n\equiv 0, \\ (b-c-2nd)[(a+2nb)(c+2nd)b-d]-(b-c)(abc-d)-2n\equiv 0, \\ (b-c-2na)[(b-2na)ac-(d-2nc)]-(b-c)(abc-d)-2n\equiv 0 \end{array}$$

Cette vérification n'offre aucune difficulté si l'on tient compte de la relation $ad-bc=1$ et de ce que, a et d étant impairs, b

et c pairs, les quatre nombres a^2-1, d^2-1, $b(b-2)$, $c(c+2)$ sont divisibles par 8.

211. Nous avons ainsi démontré que dans le cas 1° du Tableau (XX_6), où a, d sont impairs et b, c pairs, on a les relations

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}}\chi(\tau) = i^{\frac{(b-c)(abc-d)}{12}}\chi(\tau).$$

En nous reportant au Tableau du n° 197, qui montre comment on peut décomposer dans les cinq autres cas la transformation T en transformations $(\tau+1)$, $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ et en transformations $\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)$ où α, δ sont impairs et β, γ pairs, en faisant usage de la formule précédente et des formules (XLV) ainsi que de la relation $ad-bc=1$ et de la parité des nombres a, b, c, d, on peut obtenir les formules de transformation linéaire de la fonction $\chi(\tau)$ dans les cinq autres cas.

On a ainsi, dans le cas 2°, la relation

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c+d)(bcd-bd^2-a+b)}{12}}\chi(\tau+1),$$

que l'on peut écrire, en tenant compte de la formule (XLV_4) et de la relation $ad-bc=1$,

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}}\, i^{-\frac{bd(d^2-1)}{12}}\, i^{-\frac{b(b-2c)(d^2-1)}{12}}\,\frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)}.$$

La congruence

$$bd(d^2-1)\equiv 0 \pmod{48}$$

est manifeste, puisque b est pair et d impair. La congruence

$$b(b-2c)(d^2-1)\equiv 0 \pmod{48}$$

qui est manifeste quand d n'est pas divisible par 3, puisqu'alors d^2-1 est divisible par 24, résulte, quand d est divisible par 3, de la relation $ad-bc=1$ qui entraîne les deux congruences

$$bc\equiv -1 \pmod{3},\qquad b^2\equiv 1 \pmod{3}.$$

Dans le cas 2°, la formule de transformation de la fonction

$\chi(\tau)$ se présente donc sous la forme très simple

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}} \frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

qui est toute semblable à l'une des deux relations du cas 1°.

Dans le cas 5°, on a immédiatement

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{-\frac{(a+d)(acd-b)}{12}} \chi(\tau) = i^{\frac{(a+d)(abd-c)}{12}} \chi(\tau)$$

Dans le cas 4°, les calculs sont tout aussi simples, si l'on passe du cas 5° au cas 4° à l'aide du Tableau du n° **204**. On obtient ainsi la relation

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(a+d)(abd-c)}{12}} i^{\frac{bd(b^2-1)}{12}} i^{-\frac{d(d+2a)(b^2-1)}{12}} \frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)}.$$

En tenant compte des deux congruences

$$\left.\begin{aligned} db(b^2-1) &\equiv 0 \\ d(d+2a)(b^2-1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{48},$$

qui résultent immédiatement de ce que dans le cas 4°, d est pair, b impair, et de ce que l'on a $ad - bc = 1$, cette relation peut s'écrire

$$\chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(a+d)(abd-c)}{12}} \frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)}.$$

212. On pourrait de même déduire de diverses manières, à l'aide du Tableau du n° **204**, les formules de transformation linéaire, relatives aux cas 3° et 6°, des formules établies dans les cas 1°, 2°, 4°, 5°. Mais on arrive plus rapidement au résultat de la manière suivante :

Dans la formule relative au cas 2°, où a, c, d sont impairs et b pair, à savoir

$$\chi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = i^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}} \frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

changeons τ en $-\frac{1}{\tau}$; nous aurons

$$\chi\left(\frac{d-c\tau}{b-a\tau}\right) = i^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}} \frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)};$$

appliquons ensuite la formule

$$\chi(\tau) = \chi\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

en prenant

$$\tau = \frac{d - c\tau}{b - a\tau};$$

la relation précédente deviendra

$$\chi\left(\frac{b - a\tau}{-d + c\tau}\right) = \iota^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}} \frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)};$$

elle rentre toujours dans le cas 2°. Changeons maintenant a, b, c, d en $-d$, c, b, $-a$, nous aurons

$$\chi\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right) = \iota^{\frac{(c-b)(-abc+d)}{12}} \frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)},$$

et cette formule rentre dans le cas 3°, puisque a, c, d sont impairs, b pair.

En raisonnant de la même manière sur la formule relative au cas 4°, on voit qu'en changeant dans cette formule a, b, c, d en $-d$, c, b, $-a$, on obtient la relation

$$\chi\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right) = \iota^{-\frac{(a+d)(acd-b)}{12}} \frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)},$$

où b, c, d sont impairs et a pair et qui rentre donc dans le cas 6°.

Les mêmes changements simultanés de a, b, c, d en $-d$, c, b, $-a$ transposent donc entre elles les formules relatives aux cas 2° et 3° et les formules relatives aux cas 4° et 6°; ils transposent aussi entre elles les deux formules relatives au cas 1° et les deux formules relatives au cas 5°.

213 En résumé, nous avons obtenu, dans les six cas du Tableau (XX_0), les formules de transformation linéaire de la fonction $\chi(\tau)$ que l'on trouve réunies dans le Tableau suivant :

$$
(\mathrm{XLVI}_2)\quad
\begin{cases}
1^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}}\chi(\tau) = i^{\frac{(b-c)(abc-d)}{12}}\chi(\tau),\\
2^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}}\dfrac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)},\\
3^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c)(abc-d)}{12}}\dfrac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},\\
4^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(a+d)(abd-c)}{12}}\dfrac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},\\
5^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(a+d)(abd-c)}{12}}\chi(\tau) = i^{-\frac{(a+d)(acd-b)}{12}}\chi(\tau),\\
6^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{-\frac{(a+d)(acd-b)}{12}}\dfrac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)}.
\end{cases}
$$

214. Si l'on observe que les nombres entiers a, b, c, d, liés par la relation $ad - bc = 1$, vérifient les congruences

$$
\left.\begin{aligned}
(b-c)(bcd-a) &\equiv ab + ac + bd - ab^2c\\
\equiv (b-c)(abc-d) &\equiv -cd - bd - ac + bc^2d
\end{aligned}\right\}\pmod{3},
$$

et que, dans le cas où a et d sont impairs, b et c pairs, ils vérifient aussi les congruences

$$
(b-c)(bcd-a) \equiv (b-c)(abc-d) \equiv 3(a^2d^2-1) - 9(ab-cd) \pmod{16},
$$

de sorte que l'on a

$$
\left.\begin{aligned}
&(b-c)(abc-d)\\
&\equiv 16(-cd-bd-ac+bc^2d) + 3(a^2d^2-1) - 9(ab-cd)\\
&\equiv (b-c)(bcd-a)\\
&\equiv 16(ab+ac+bd-ab^2c) + 3(a^2d^2-1) - 9(ab-cd)
\end{aligned}\right\}\pmod{48},
$$

on voit que, dans le cas 1° du Tableau (XX_0), les formules de transformation que nous venons d'obtenir peuvent être remplacées par les suivantes :

$$
\begin{aligned}
\chi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) &= (-1)^{\frac{a^2d^2-1}{8}} e^{\frac{2\pi i}{3}(ab+ac+bd-ab^2c)} e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab-cd)}\chi(\tau),\\
&= (-1)^{\frac{a^2d^2-1}{8}} e^{\frac{2\pi i}{3}(-cd-bd-ac+bc^2d)} e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab-cd)}\chi(\tau)
\end{aligned}
$$

De même, si l'on observe que les nombres impairs a, c, d et le nombre pair b, liés par la relation $ad - bc = 1$, vérifient la con-

gruence

$$(b-c)(bcd-a) \equiv 3(a^2-1)+9(ab+cd)+8 \quad (\text{mod. } 16),$$

de sorte que l'on a

$$\left.\begin{aligned}(b-c)(bcd-a) \equiv 16(&ab+ac+bd-ab^2c)\\ &+3(a^2-1)+9(ab+cd)+24\end{aligned}\right\} (\text{mod. } 48),$$

on voit que, dans le cas 2°, la formule de transformation linéaire de la fonction $\chi(\tau)$ peut s'écrire

$$\chi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = -(-1)^{\frac{a^2-1}{8}} e^{\frac{2\pi i}{3}(ab+ac+bd-ab^2c)} e^{\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)} \frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)}.$$

En changeant dans ces deux formules a, b, c, d, τ en $b, -a, d, -c, -\frac{1}{\tau}$, on obtient les formules de transformation linéaire de la fonction $\chi(\tau)$, dans les cas 5° et 6°, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\chi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) &= (-1)^{\frac{b^2c^2-1}{8}} e^{\frac{2\pi i}{3}(-ab+bd+ac-a^2bd)} e^{\frac{3\pi i}{8}(ab-cd)} \chi(\tau)\\ &= (-1)^{\frac{b^2c^2-1}{8}} e^{\frac{2\pi i}{3}(cd-ac-bd+acd^2)} e^{\frac{3\pi i}{8}(ab-cd)} \chi(\tau),\\ \chi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) &= -(-1)^{\frac{b^2-1}{8}} e^{\frac{2\pi i}{3}(-ab+bd+ac-a^2bd)} e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)} \frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)}.\end{aligned}$$

Enfin, en changeant dans les dernières formules relatives aux cas 2° et 6°, a, b, c, d en $-d, c, b, -a$, on obtient les formules de transformation linéaire de la fonction $\chi(\tau)$ dans les cas 3° et 4° sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\chi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) &= -(-1)^{\frac{d^2-1}{8}} e^{\frac{2\pi i}{3}(-cd-bd-ac+bc^2d)} e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)} \frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},\\ \chi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) &= -(-1)^{\frac{c^2-1}{8}} e^{\frac{2\pi i}{3}(cd-ac-bd+acd^2)} e^{\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)} \frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)}.\end{aligned}$$

215. Les congruences

$$\left.\begin{aligned}-ab-a^2bd &\equiv ab-ab^2c\\ cd+acd^2 &\equiv -cd+bc^2d\\ -cd-bd-ac+bc^2d &\equiv ab+ac+bd-ab^2c\end{aligned}\right\} (\text{mod. } 3),$$

ayant lieu quels que soient les entiers a, b, c, d liés par la rela-

tion $ad - bc = 1$, on a, en résumé, dans les six cas du Tableau (XX_6),

$$
(\mathrm{XLVI}_3)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
1^\circ & \chi(\mathrm{T}) = & \left(\dfrac{2}{ad}\right) \rho e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab-cd)} \chi(\tau), \\[2ex]
2^\circ & \chi(\mathrm{T}) = - & \left(\dfrac{2}{a}\right) \rho e^{\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)} \dfrac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)}, \\[2ex]
3^\circ & \chi(\mathrm{T}) = - & \left(\dfrac{2}{d}\right) \rho e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)} \dfrac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)}, \\[2ex]
4^\circ & \chi(\mathrm{T}) = - & \left(\dfrac{2}{c}\right) \rho e^{\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)} \dfrac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)}, \\[2ex]
5^\circ & \chi(\mathrm{T}) = & \left(\dfrac{2}{bc}\right) \rho e^{\frac{3\pi i}{8}(ab-cd)} \chi(\tau), \\[2ex]
6^\circ & \chi(\mathrm{T}) = - & \left(\dfrac{2}{b}\right) \rho e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)} \dfrac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)},
\end{array}
\right.
$$

où l'on a posé

$$
\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}(ab+ac+bd-ab^2c)} = e^{-\frac{2\pi i}{3}(cd+ac+bd-bc^2d)}.
$$

Ce sont les formules mêmes de M. Hermite, tandis que le Tableau ($XLVI_2$) est celui de M. Schlafli.

VI. — Détermination, en fonction des coefficients de la transformation linéaire des fonctions ϑ, des racines huitièmes de l'unité qui figurent dans ces formules de transformation.

216. Nous avons vu (n° 149) que toute substitution linéaire à coefficients entiers et à déterminant $+1$ peut être obtenue par répétition et combinaison des deux substitutions

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

et de leurs inverses.

En suivant la marche indiquée au n° 150, il est d'ailleurs facile, chaque fois que les coefficients de la substitution linéaire ont des valeurs numériques données, d'effectuer la décomposition de cette

substitution en substitutions

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et en substitutions inverses. Une fois cette décomposition effectuée, on n'a plus qu'à appliquer, dans un ordre déterminé, les formules de transformation du paragraphe précédent pour obtenir, dans le cas particulier considéré, les formules de transformation linéaire des fonctions $\mathfrak{S}$ et, par suite, les racines huitièmes de l'unité $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$.

Mais on peut chercher à s'affranchir de cette décomposition préalable de la substitution linéaire donnée. A cet effet, nous établirons, en nous plaçant avec M. Dedekind [1] au point de vue de la fonction $h(\tau)$, des formules qui donnent *explicitement* ε, et, par suite $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$, en fonction des coefficients entiers a, b, c, d de la transformation linéaire

$$\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right).$$

217. Si l'on prend les dérivées, par rapport à v, des deux membres de l'égalité ($XLII_1$) et que l'on pose ensuite $v = 0$, il vient

$$(\alpha) \qquad \varepsilon\sqrt{a + b\tau}\,\mathfrak{S}'_1(0 \mid \tau) = \frac{1}{a + b\tau}\,\mathfrak{S}'_1(0 \mid \mathrm{T}).$$

En tenant compte de la relation

$$\mathfrak{S}'_1(0) = 2\pi h^3(\tau)$$

et en extrayant les racines cubiques dans les deux membres de l'égalité (α), on obtient immédiatement l'égalité

$$(\beta) \qquad h(\mathrm{T}) = \varepsilon^{\frac{1}{3}}\sqrt{a + b\tau}\,h(\tau),$$

où $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ est une racine vingt-quatrième de l'unité que nous allons déterminer en fonction de a, b, c, d.

---

[1] *Riemann's Werke*, 2ᵉ édition, Nachlass XXVII, 2. *Fragmente uber die Grenzfalle der elliptischen Modulfunctionen*

Dans le cas où b est nul, cette détermination est immédiate. En effet, l'égalité $ad - bc = 1$ exige alors que l'on ait, soit $a = d = 1$, soit $a = d = -1$ et l'on peut se limiter à la première alternative, puisque T ne change pas quand on change le signe des quatre nombres a, b, c, d. On a alors

$$T = \tau + c,$$

et, par suite, (XLV_1), d'après la formule

$$h(\tau + c) = \varepsilon^{c} h(\tau).$$

218. Nous supposerons dans la suite b différent de zéro $a + b\tau$ n'est alors jamais réel.

La constante ε^{1} n'est susceptible que de vingt-quatre valeurs; elle ne dépendra donc pas de τ si l'on a défini $\sqrt{a + b\tau}$ comme une fonction univoque et continue de τ pour les valeurs de τ représentées par des points situés au-dessus de l'axe des quantités réelles, valeurs qui sont les seules que nous ayons à considérer ici.

A cet effet on pourrait, puisque $a + b\tau$ est toujours un nombre imaginaire, prendre comme argument de $a + b\tau$ un angle différent de zéro, compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et pour $\sqrt{a + b\tau}$ la valeur imaginaire correspondante, dont l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, en sorte que la partie réelle de $\sqrt{a + b\tau}$ soit positive. Mais il y a avantage à substituer à $\sqrt{a + b\tau}$ une quantité qui ne change pas, non plus que T, quand on remplace a, b, c, d par $-a, -b, -c, -d$: à la place de $\sqrt{a + b\tau}$ on mettra $\sqrt[4]{-(a + b\tau)^2}$ qui n'en peut différer que par un facteur égal à une racine huitième de l'unité, puisque les valeurs absolues de $\sqrt{a + b\tau}$ et de $\sqrt[4]{-(a + b\tau)^2}$ sont égales et que les arguments de ces quantités ne peuvent différer que par un multiple de $\frac{\pi}{4}$. Cette racine huitième de l'unité, multipliée par ε^{1}, reproduit une racine vingt-quatrième de l'unité Quant à $\sqrt[4]{-(a + b\tau)^2}$, elle sera définie comme il suit : $-(a + b\tau)^2$ n'est jamais un nombre négatif, puisque le carré d'un nombre imaginaire $a + b\tau$ ne peut être un nombre positif; dès lors on peut prendre comme argument de $-(a + b\tau)^2$

un angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et pour $\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}$ la valeur correspondante, dont l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$.

Entre les deux fonctions $\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}$ et $\sqrt{a+b\tau}$, précédemment définies, on a les relations

$$\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2} = e^{\mp\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a+b\tau},$$

où il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que b est positif ou négatif. En effet, si b est positif, l'argument de $a+b\tau$ peut être regardé comme compris entre o et π, puisque le coefficient de i dans $a+b\tau$ est positif; l'argument de la quantité $\sqrt{a+b\tau}$, définie comme précédemment, sera donc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et l'argument de $e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a+b\tau}$ sera bien compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$, comme celui de $\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}$ Le raisonnement est le même quand b est négatif.

Quoi qu'il en soit, la fonction $\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}$ définie, comme nous venons de le faire, est univoque et continue pour les valeurs de τ représentées par des points situés au-dessus de l'axe des quantités réelles, et, si l'on écrit, au lieu de l'égalité (β), l'égalité

$$(\gamma) \qquad \mathrm{h}(\mathrm{T}) = \varepsilon_1 \sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}\,\mathrm{h}(\tau),$$

où ε_1 est une racine vingt-quatrième de l'unité, il est évident, par le raisonnement du n° **181**, que ε_1 ne peut dépendre de τ; en sorte que l'on peut remplacer la formule (γ) par celle-ci

$$(\delta) \qquad \mathrm{h}(\mathrm{T}) = e^{\frac{\mathrm{N}\pi i}{12}} \sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}\,\mathrm{h}(\tau),$$

N étant un nombre entier indépendant de τ qui, lorsqu'on se donne a, b, c, d, n'est d'ailleurs déterminé par cette formule qu'à un multiple près de 24. Nous allons donner de ce nombre N une définition précise.

219. On tire de l'égalité précédente

$$\log \mathrm{h}(\mathrm{T}) = \mathrm{N}\frac{\pi i}{12} + \frac{1}{4}\log[-(a+b\tau)^2] + \log \mathrm{h}(\tau) + 2k\pi i,$$

k étant un nombre entier qui dépend des déterminations choisies pour les logarithmes. On peut faire rentrer k dans N, ce qui ne modifie N que d'un multiple de 24, et adopter pour les logarithmes des déterminations précises : alors N sera entièrement déterminé.

Nous avons choisi l'argument de $-(a+b\tau)^2$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$; il est naturel d'adopter pour $\log[-(a+b\tau)^2]$ la détermination correspondante, c'est-à-dire la détermination *principale*, celle pour laquelle le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. D'autre part, la définition de $\mathrm{h}(\tau)$

$$\mathrm{h}(\tau) = e^{\frac{\tau\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1-q^{2n})$$

donne, en choisissant convenablement les déterminations des logarithmes,

$$\log \mathrm{h}(\tau) = \frac{\tau\pi i}{12} + \log \prod_{n=1}^{n=\infty} (1-q^{2n})$$

Mais il est aisé de voir que l'une des déterminations du logarithme qui figure au second membre est la somme de la série convergente ([1])

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \log(1-q^{2n}),$$

où le logarithme a sa détermination principale.

Pour éviter toute ambiguïté, nous poserons, en conservant toujours cette signification à $\log(1-q^{2n})$,

$$(\varepsilon) \qquad \mathrm{lh}(\tau) = \frac{\tau\pi i}{12} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \log(1-q^{2n})$$

([1]) C'est là une propriété générale que l'on a négligé de signaler dans l'Introduction et que nous rappelons rapidement ici.

Observons d'abord que, si x est un nombre imaginaire dont la valeur absolue est moindre que un, l'argument de $1+x$ peut être supposé compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, en sorte que la détermination principale du logarithme de $1+x$ a le

$lh(\tau)$ est alors une des déterminations de $\log h(\tau)$; c'est une fonction univoque et continue de τ pour les points τ situés au-dessus

---

coefficient de sa partie imaginaire compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ $\log(1+x)$ est ainsi défini, sous la condition $|x|<1$ comme une fonction univoque et continue de x; cette fonction coïncide avec la somme de la série

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\quad,$$

puisque la coïncidence a lieu pour $x=0$. Ceci posé, soit

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+u_n)$$

un produit infini absolument convergent dans lequel on suppose que tous les termes u_n aient leur valeur absolue moindre que un En désignant par v_n la détermination principale du logarithme de $1+u_n$, on aura

$$v_n=\frac{u_n}{1}-\frac{u_n^2}{2}+\frac{u_n^3}{3}-$$

Cette série reste convergente quand on y remplace tous les termes $\frac{u_n}{1}$, $-\frac{u_n^2}{2}$, $\frac{u_n^3}{3}$, . par leurs valeurs absolues, elle a alors pour somme

$$V_n=-\log(1-|u_n|),$$

le logarithme ayant ici la signification élémentaire

D'ailleurs, la série à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}V_n$$

est convergente à cause de la convergence du produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-|u_n|)$$

Il en résulte (n° 38) que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}v_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\log(1+u_n),$$

dans laquelle le logarithme a sa détermination principale, est convergente : sa

de l'axe des quantités réelles. Nous aurons de même

$$(\zeta) \qquad \mathrm{lh}(\mathrm{T}) = \frac{\mathrm{T}\pi i}{12} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \log(1 - \mathrm{Q}^{2n}),$$

en supposant

$$\mathrm{Q} = e^{\mathrm{T}\pi i},$$

et, finalement, nous écrirons

$$(\eta) \qquad \mathrm{lh}(\mathrm{T}) = \mathrm{N}\frac{\pi i}{12} + \frac{1}{4}\log[-(a+b\tau)^2] + \mathrm{lh}(\tau)$$

Le nombre entier N est complètement déterminé par cette égalité, ainsi qu'il résulte toujours du raisonnement du n° 181, puisque les fonctions

$$\mathrm{lh}(\mathrm{T}) = \mathrm{lh}\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right), \quad \log[-(a+b\tau)^2], \quad \mathrm{lh}(\tau)$$

sont univoques et continues pour les valeurs considérées de τ.

C'est la détermination de ce nombre précis, au moyen de a, b, c, d qui va désormais nous occuper : l'égalité précédente met en évidence que sa valeur ne change pas quand on remplace a, b, c, d par $-a$, $-b$, $-c$, $-d$

220. Tout d'abord, nous allons substituer à la recherche de N

---

valeur est manifestement une des déterminations de

$$\log \prod_{n=1}^{n=\infty} (1+u_n),$$

il en résulte aussi que la série à double entrée

$$\sum (-1)^{p-1} \frac{u_n^p}{p},$$

où n et p doivent prendre les valeurs 1, 2, 3, . . , est absolument convergente et peut être ordonnée comme l'on veut Dans le cas du texte, où l'on a $|q| < 1$, on trouve ainsi, en ordonnant suivant les puissances entières de q,

$$-\sum_{n=1}^{n=\infty} \log(1-q^{2n}) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n q^{2n},$$

où a_n est la somme des inverses des diviseurs du nombre n

la recherche d'un autre nombre entier qui ne dépend plus que de a, b.

Dans le cas où a et b sont différents de zéro, on doit toujours supposer a et b premiers entre eux, puisque $ad - bc$ est égal à un.

Regardons a, b comme des données; c, d doivent alors former une solution $x = c$, $y = d$ de l'équation indéterminée

$$ay - bx = 1$$

et comme a, b sont premiers entre eux, toute autre solution sera donnée par les formules

$$c' = c + ma, \qquad d' = d + mb$$

où m est un entier quelconque. Soit d'ailleurs

$$\tau' = \frac{c' + d'\tau}{a + b\tau} = \tau + m,$$

et N′ le nombre qui dépend de a, b, c', d' comme N dépend de a, b, c, d, nous aurons

$$\text{lh}(\tau') = N' \frac{\pi i}{12} + \frac{1}{4}\log[-(a + b\tau)^2] + \text{lh}\,\tau$$

D'ailleurs

$$\text{lh}(\tau') = \text{lh}(\tau + m) = \frac{(\tau + m)\pi i}{12} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \log(1 - q^{2n}),$$

à la vérité, on aurait dû, dans cette égalité, remplacer $q = e^{\tau\pi i}$ par

$$e^{(\tau+m)\pi i},$$

mais cette substitution ne peut que changer q en $-q$ et, comme on ne voit figurer que des puissances paires de q, elle est inutile. On a donc

$$\text{lh}(\tau') = \text{lh}(\tau) + m\frac{\pi i}{12},$$

et, par suite, en comparant les valeurs de $\text{lh}(\tau)$ et $\text{lh}(\tau')$,

$$N + m = N',$$

ou encore

$$N' - \frac{d'}{b} = N - \frac{d}{b}.$$

Le nombre $N - \frac{d}{b}$ reste donc le même quand on substitue à c, d, n'importe quelle solution de l'équation indéterminée

$$ay - bx = 1,$$

en d'autres termes, il ne dépend que de a, b, il en est de même du nombre entier $bN - d$ et du nombre entier

$$bN - a - d,$$

c'est ce dernier nombre que nous allons chercher à déterminer; une fois qu'il sera connu, N sera aussi connu

Nous poserons (¹)

$$(\theta) \qquad bN - a - d = [a, b],$$

et l'équation (η) qui définit N sera remplacée par l'équation

$$(\varkappa) \qquad \text{lh}\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right) = \frac{[a, b] + a + d}{12b}\pi i + \frac{1}{4}\log[-(a + b\tau)^2] + \text{lh}\tau,$$

qui définit le nombre $[a, b]$ quand a et b sont différents de zéro

Dans le cas où a est égal à zéro, nous poserons encore

$$bN - d = [0, b],$$

en sorte que l'équation ($\varkappa$) subsiste, nous prouverons d'ailleurs dans un instant que $[0, b]$ est nul, et par conséquent indépendant de d, ce que la définition précédente ne montre pas tout d'abord.

Le nombre $[a, b]$ est donc défini par l'équation ($\varkappa$) pour tout entier b différent de zéro et pour tout entier a. Le symbole $[a, b]$ n'aurait aucun sens si nous y supposions $b = 0$

221. L'égalité ($\varkappa$), en y changeant a, b, c, d en $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, montre de suite que l'on a, pour tout entier b différent de zéro et pour tout entier a,

$$(1) \qquad [-a, -b] = -[a, b].$$

D'autres propriétés du symbole $[a, b]$ vont s'obtenir en faisant diverses substitutions dans la même égalité.

(¹) L'introduction du symbole $[a, b]$ et les démonstrations de ses propriétés qui suivent, nos 221-227, sont dues à M Dedekind

En supposant

$$\tau = \mu + \nu i,$$

où μ et ν sont des nombres réels dont le second est positif, faisons

$$\tau_1 = -\mu + \nu i$$

Les deux points τ, τ_1 sont symétriques par rapport à l'axe des quantités purement imaginaires. Les nombres τ, $-\tau_1$ sont conjugués; il en est de même des nombres $i\tau$, $i\tau_1$, et, par suite, des nombres

$$q = e^{\tau\pi i}, \qquad q' = e^{\tau_1\pi i},$$

ainsi les deux fonctions

$$\text{h}(\tau) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n}), \qquad \text{h}(\tau_1) = q'^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q'^{2n})$$

sont imaginaires conjuguées.

Si l'on pose

$$\text{T}_1 = \frac{-c + d\tau_1}{a - b\tau_1},$$

il est clair que les deux points T et T_1 sont dans la même situation relative que τ et τ_1, puisque

$$\text{T} = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \qquad -\text{T}_1 = \frac{c + d(-\tau_1)}{a + b(-\tau_1)}$$

sont des nombres imaginaires conjugués; les deux fonctions $\text{h}(\text{T})$, $\text{h}(\text{T}_1)$ sont donc aussi imaginaires conjuguées.

Comme les coefficients a, $-b$, $-c$, d de la transformation

$$\frac{-c + d\tau_1}{a - b\tau_1}$$

vérifient la relation $ad - (-b)(-c) = 1$, et que les points τ_1 et T_1 sont au-dessus de l'axe des quantités réelles, on peut appliquer la relation ($\varkappa$) en y remplaçant τ et T respectivement par τ_1 et T_1, et simultanément a, b, c, d par a, $-b$, $-c$, d. On aura ainsi

$$(\lambda) \quad \text{lh}(\text{T}_1) = \frac{[a, -b] + a + d}{-12b}\pi i + \frac{1}{4}\log[-(a - b\tau_1)^2] + \text{lh}\tau_1.$$

Mais les valeurs principales des logarithmes de deux quantités imaginaires conjuguées sont elles-mêmes des quantités imaginaires conjuguées : telles sont donc les fonctions

$$\frac{1}{4}\log[-(a+b\tau)^2] \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}\log[-(a+b\tau_1)^2],$$
$$\log(1-q^{2n}) \quad \text{et} \quad \log(1-q'^{2n}),$$
$$\text{lh}(\tau) \quad \text{et} \quad \text{lh}(\tau_1), \qquad \text{lh}(\text{T}) \quad \text{et} \quad \text{lh}(\text{T}_1).$$

En se reportant aux équations ($\varkappa$), (λ), on en conclut

$$[a, -b] = [a, b]. \tag{2}$$

Cette égalité jointe à l'égalité (1)

$$[-a, -b] = -[a, b]$$

donne, pour tout entier b différent de zéro et pour tout entier a,

$$[-a, b] = -[a, b], \tag{3}$$

d'où, en particulier, pour $a = 0$,

$$[0, b] = 0 \tag{4}$$

Ces égalités montrent que, pour le calcul du nombre $[a, b]$, on pourra se borner au cas où a et b sont positifs.

222. Changeons maintenant, dans l'égalité ($\varkappa$), τ en $\tau + 1$. Comme, d'après la formule (ε), on a

$$\text{lh}(\tau+1) = \frac{(\tau+1)\pi i}{12} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \log[1-(-q)^{2n}] = \text{lh}(\tau) + \frac{\pi i}{12},$$

on pourra écrire

$$\text{lh}\left[\frac{c+d(\tau+1)}{a+b(\tau+1)}\right] = \frac{[a, b]+a+d}{12b}\pi i + \tfrac{1}{4}\log[-(a+b+b\tau)^2] + \text{lh}\,\tau + \frac{\pi i}{12};$$

mais on a aussi, en remplaçant dans la formule ($\varkappa$) les nombres a, b, c, d par $a+b, b, c+d, d$, ce qui est permis puisque $(a+b)d - (c+d)b$ est égal à 1,

$$\text{lh}\left[\frac{c+d+d\tau}{a+b+b\tau}\right] = \frac{[a+b, b]+a+b+d}{12b}\pi i + \tfrac{1}{4}\log[-(a+b+b\tau)^2] + \text{lh}\,\tau,$$

on en conclut

$$[a+b, b] = [a, b],$$

et il en résulte par répétition, en désignant par n un entier quelconque,

$$(5) \qquad [a+nb, b] = [a, b]$$

Ainsi les deux nombres $[a, b]$, $[a', b]$ sont égaux si l'on a

$$a' \equiv a \qquad (\text{mod. } b).$$

223. Changeons aussi, dans l'égalité ($\varkappa$), τ en $-\frac{1}{\tau}$: il viendra

$$\text{lh}\left[\frac{-d+c\tau}{-b+a\tau}\right] = \frac{[a, b]+a+d}{12b}\pi i + \frac{1}{4}\log\left[-\left(a-\frac{b}{\tau}\right)^2\right] + \text{lh}\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$

D'autre part, en remplaçant dans la même égalité ($\varkappa$) les nombres a, b, c, d par les nombres $-b$, a, $-d$, c, on aura

$$\text{lh}\left[\frac{-d+c\tau}{-b+a\tau}\right] = \frac{[-b, a]-b+c}{12a}\pi i + \frac{1}{4}\log[-(-b+a\tau)^2] + \text{lh}(\tau),$$

et la comparaison de ces deux expressions de $\text{lh}\left[\frac{-d+c\tau}{-b+a\tau}\right]$ va nous fournir une nouvelle propriété du symbole $[a, b]$.

On a établi (n° 185) la relation

$$\text{h}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\text{h}(\tau),$$

qui équivaut à la relation

$$\text{h}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt[4]{-\tau^2}\,\text{h}(\tau).$$

comme on s'en assure immédiatement en supposant $a=0$, $b=1$ dans la formule

$$\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2} = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a+b\tau}$$

établie au n° 218 pour un entier positif quelconque b.

On en conclut, puisque $\text{lh}(\tau)$ est l'une des déterminations de $\log\text{h}(\tau)$,

$$\text{lh}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{4}\log(-\tau^2) + \text{lh}(\tau) + 2k\pi i,$$

k étant un nombre entier qui, toujours en vertu du raisonnement fait au n° **181**, ne peut dépendre de τ, puisque les trois fonctions

$$\mathrm{lh}\left(-\frac{1}{\tau}\right), \quad \log(-\tau^2), \quad \mathrm{lh}(\tau),$$

sont univoques et continues pour les valeurs de τ représentées par des points situés au-dessus de l'axe des quantités réelles; d'ailleurs, pour $\tau = i$, on a évidemment $k = 0$; donc, on a dans tous les cas

$$\mathrm{lh}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{4}\log(-\tau^2) + \mathrm{lh}\,\tau,$$

et, par suite,

$$(\mu)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{[a, b] + a + d}{12b}\pi i - \frac{[-b, a] - b + c}{12a}\pi i + \frac{1}{4}\log\left[-\left(a - \frac{b}{\tau}\right)^2\right] \\ &\qquad - \frac{1}{4}\log[-(-b + a\tau)^2] + \frac{1}{4}\log(-\tau^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

224. Supposons maintenant $a > 0$, $b > 0$ et faisons la remarque préliminaire que voici : Si x est représenté par un point situé au-dessus de l'axe des quantités réelles, on pourra prendre pour l'argument ξ de x un angle compris entre 0 et π; l'un des arguments de $-x^2$ sera $2\xi - \pi$, et cet argument est compris entre $-\pi$ et $+\pi$; par suite, le coefficient de i dans $\log(-x^2)$ sera précisément $2\xi - \pi$, en désignant par $\log(-x^2)$ la détermination principale du logarithme.

Soient donc λ, μ, ν les arguments, compris entre 0 et π des nombres τ, $a\tau - b$, $a - \frac{b}{\tau}$ qui tous ont pour coefficient de i un nombre positif. Observons que l'on a $\mu > \lambda$: en effet, pour construire le point $a\tau - b$, on peut construire d'abord le point $a\tau$ qui se trouve sur la même direction, partant de l'origine, que le point τ, puis avancer ce point, sur une parallèle à l'axe des quantités réelles, dans le sens des quantités négatives, d'une longueur égale à b : dans ce dernier mouvement, il est clair que la direction qui va de l'origine au point mobile tourne dans le sens des rotations positives. Puisque l'angle $\mu - \lambda$ est positif, inférieur à π et que cet angle est une des déterminations de l'argument de $\frac{a\tau - b}{\tau}$, il ne peut différer de ν. Il résulte de là que le coefficient

de i dans

$$\log\left[-\left(a-\frac{b}{\tau}\right)^2\right]+\log(-\tau^2)-\log[-(a\tau-b)^2]$$

est

$$2\nu-\pi+2\lambda-\pi-(2'\mu-\pi)=-\pi$$

Dès lors l'égalité (μ) conduit à la relation

$$\frac{[a,b]+a+d}{b}-\frac{[-b,a]-b+c}{a}-3=0,$$

qui, en remplaçant $[-b, a]$ par $-[b, a]$, donne

$$a[a,b]+b[b,a]+a^2+b^2+1-3ab=0$$

Cette relation suppose a, b positifs; mais il est aisé de voir, en faisant usage des relations (1), (2), (3), que l'on a, dans tous les cas où a et b sont différents de zéro,

$$(6)\qquad a[a,b]+b[b,a]+a^2+b^2+1-3ab\,\mathrm{sgn}\,ab=0,$$

en désignant en général par sgn A, où A est un nombre réel quelconque différent de zéro, l'unité affectée du signe + ou du signe — suivant que A est positif ou négatif.

225. Cette relation (6), jointe à la relation (5)

$$a+nb,b]=[a,b],$$

permet, dans le cas où a n'est pas nul, de ramener le calcul du nombre $[a, b]$ défini par l'égalité (x) au cas où le nombre a est égal à ± 1. En effet, la dernière relation montre que l'on peut toujours remplacer a par le reste de la division de a par b, en d'autres termes supposer $|a|<|b|$; cela fait, la relation (6) ramène le calcul de $[a, b]$ à celui de $[b, a]$; on remplacera encore b par le reste de la division de b par a, etc. Les nombres que l'on substitue successivement à a, b sont les nombres mêmes que l'on trouve comme restes dans l'opération du plus grand commun diviseur; puisque a et b sont premiers entre eux, deux restes consécutifs sont toujours premiers entre eux et le dernier reste est ± 1, en sorte qu'on est ramené à calculer $[\pm 1, a]$.

226. Le calcul des nombres $[1, a]$, $[-1, a]$, où a est un entier différent de zéro, n'offre aucune difficulté.

La relation (6) donne en effet, en y supposant $b = 1$,

$$a[a, 1] + [1, a] + a^2 + 2 - 3a \operatorname{sgn} a = 0;$$

comme, d'après les relations (5) et (4), on a

$$[a, 1] = [0, 1] = 0,$$

on peut écrire

$$(7) \qquad [1, a] = 3a \operatorname{sgn} a - a^2 - 2 = -(a - \operatorname{sgn} a)(a - 2 \operatorname{sgn} a)$$

On déduit d'ailleurs immédiatement de la relation (3) que l'on a

$$[-1, a] = -[1, a]$$

Dans tous les cas, la recherche du nombre $[a, b]$ est ainsi ramenée à des opérations purement arithmétiques

Il serait aisé de démontrer que ce nombre est toujours pair : nous ne nous arrêterons pas à cette propriété dont nous n'aurons pas besoin.

227. Nous calculerons encore $a, 2]$ et $2, a]$

On doit nécessairement supposer a impair, en ajoutant à a un nombre convenable de fois 2, on ramènera a à être égal à l'unité; mais la formule (7) montre que $[1, 2]$ est nul, on en conclut

$$(8) \qquad [a, 2] = [1, 2] = 0$$

On a ensuite

$$a[a, 2] + 2[2, a] + a^2 + 5 - 6a \operatorname{sgn} a = 0,$$

d'où

$$(9) \qquad [2, a] = -\frac{a^2 + 5 - 6a \operatorname{sgn} a}{2}.$$

228. Notre but est de ramener le calcul du symbole $[a, b]$ à celui d'une autre expression qui joue un rôle considérable en Arithmétique et que l'on désigne par le symbole

$$\left(\frac{a}{b}\right),$$

introduit par Legendre et généralisé par Jacobi : c'est M. Hermite qui a montré [1] le rôle de ce symbole dans la théorie qui nous occupe, rôle que Jacobi avait d'ailleurs soupçonné [2].

Ce symbole peut être défini dans le cas où les nombres a, b sont des entiers impairs premiers entre eux dont l'un au moins est positif, par les propriétés suivantes :

1° Si a est positif, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{-b}\right);$$

2° La congruence

$$a \equiv a' \qquad (\operatorname{mod} b),$$

où a' est comme a un nombre impair et b un nombre positif, entraîne

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a'}{b}\right);$$

3° On a, en supposant que l'un au moins des deux nombres a et b est positif,

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}},$$

4° On a enfin, en supposant $a > 0$,

$$\left(\frac{1}{a}\right)=1, \qquad \left(\frac{-1}{a}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}}$$

La propriété 3° est ce que l'on appelle la loi de réciprocité.

229. L'existence, pour chaque couple de deux nombres impairs a, b, premiers entre eux et qui ne sont pas négatifs en même temps, d'une fonction numérique $\left(\frac{a}{b}\right)$ qui jouisse des propriétés précédentes résulte en Arithmétique de la signification du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ dans la théorie des restes quadratiques comme aussi de diverses expressions analytiques que l'on en peut donner. Nous n'avons pas à y recourir, car cette existence nous sera assurée par la question

---

[1] *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. III, p. 26.

[2] *Werke*, t. III, p. 189.

même qui nous occupe : nous avons seulement à observer que, si l'on admet cette existence, les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° permettront de calculer le nombre $\left(\frac{a}{b}\right)$ toutes les fois que les nombres a, b seront donnés.

En effet, la propriété 1° permet de supposer toujours que le dénominateur du symbole est positif. Si maintenant a est plus grand en valeur absolue que b, on déterminera le nombre entier n par les conditions

$$2nb < a < 2nb + 2b,$$

et l'on remplacera a par celui des deux nombres $a - 2nb$, $a - 2nb - 2b$ qui est, en valeur absolue, moindre que b, soit a_1 le nombre choisi, qui est évidemment impair et premier à b; on aura à cause de (2),

$$\left(\frac{a_1}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right).$$

Si a_1 se trouve être égal à ± 1, la propriété 4° donne la valeur du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$; s'il n'en est pas ainsi, on ramènera le calcul de $\left(\frac{a_1}{b}\right)$ au calcul de $\left(\frac{b}{a_1}\right)$ par la formule

$$\left(\frac{a_1}{b}\right) = \frac{(-1)^{\frac{a_1-1}{2}\frac{b-1}{2}}}{\left(\frac{b}{a_1}\right)},$$

qui résulte de 3°; on traitera $\left(\frac{b}{a_1}\right)$ comme on a fait pour $\left(\frac{a}{b}\right)$, et comme, en continuant ainsi, les termes des symboles successifs sont des nombres entiers de plus en plus petits en valeur absolue, on finira toujours par être ramené à calculer un symbole de la forme $\left(\frac{\pm 1}{A}\right)$ à dénominateur impair positif, symbole dont la valeur $+1$ ou -1 sera donnée par la propriété 4°.

Dans cette suite d'opérations, chaque symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ est égal à celui qui le suit, ou à son inverse, multiplié par ± 1. Comme le dernier symbole $\left(\frac{\pm 1}{A}\right)$ est égal à ± 1, il en est de même de tous ceux qui le précèdent et du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ lui-même.

230. Observons que le même raisonnement et les mêmes con-

clusions subsisteraient si, en conservant les propriétés 2°, 3°, 4°, on remplaçait la première propriété par la suivante

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{-b}\right)=1,$$

le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ ainsi défini serait encore égal à ± 1 et par conséquent serait exactement le même que le précédent

Dans l'un et l'autre cas la loi de réciprocité peut être remplacée par la formule suivante

$$\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}.$$

Enfin nous aurons encore besoin de la définition du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ quand a est pair; b est alors nécessairement impair, si l'on veut que les nombres a, b soient premiers entre eux. Nous conviendrons alors de prendre

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a+nb}{b}\right),$$

n étant un nombre entier impair tel que des deux nombres impairs $a+nb$ et b l'un au moins soit positif; la définition est évidemment indépendante du nombre n et le symbole $\left(\frac{a+nb}{b}\right)$ se calculera par la règle précédemment exposée.

231. Après cette digression sur les seules propriétés du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ dont nous ayons besoin pour le moment, rappelons que, dans l'expression (δ) de $h(\tau)$, c'est la quantité $e^{N\frac{\pi i}{12}}$ qui figure. D'après la relation (θ), cette quantité est égale à $e^{\frac{\pi i}{12b}(a+d+[a,b])}$. Les propriétés (1)...(7) du symbole $[a, b]$ amènent à rechercher quelle est sur cette expression, l'influence de l'interversion des lettres a, b, à laquelle il faut faire correspondre le changement de c, d en $-d$, $-c$ de manière à vérifier l'égalité

$$b(-c)-a(-d)=1.$$

Soit donc

$$N'=\frac{b-c+[b,a]}{a},$$

on aura

$$\mathrm{N}+\mathrm{N}'=\frac{a[a,b]+b[b,a]+a^2+b^2+ad-bc}{ab},$$

et, par conséquent,

$$e^{\frac{\mathrm{N}\pi i}{12}}\times e^{\frac{\mathrm{N}'\pi i}{12}}=e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}(ab)},$$

en vertu de l'égalité $ad-bc=1$ et de la relation (6), qui montre que $\mathrm{N}+\mathrm{N}'$ est égal à $3\operatorname{sgn}(ab)$.

232. On est amené à chercher à modifier, par l'adjonction d'un facteur convenable, la racine vingt-quatrième de l'unité considérée de manière que le produit qui remplacera

$$e^{\frac{\mathrm{N}\pi i}{12}}\times e^{\frac{\mathrm{N}'\pi i}{12}}$$

soit égal à

$$(-1)^{\frac{(a-1)(b-1)}{4}}$$

au lieu d'être égal à $e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}(ab)}$.

Bornons-nous d'abord au cas où les nombres a, b sont impairs et positifs. Le problème posé sera résolu si l'on trouve une fonction $\varphi(a,b,c,d)$ qui représente toujours un nombre entier et telle que l'on ait

$$\varphi(a,b,c,d)+\varphi(b,a,-d,-c)=-3(a-1)(b-1)-3,$$

car on aura alors

$$e^{\frac{(\mathrm{N}+\varphi)\pi i}{12}}\times e^{\frac{(\mathrm{N}'+\varphi')\pi i}{12}}=e^{\frac{-\pi i}{4}(a-1)(b-1)}=(-1)^{\frac{(a-1)(b-1)}{4}}$$

[on a écrit φ et φ' à la place de $\varphi(a,b,c,d)$, $\varphi(b,a,-d,-c)$]. Or l'équation de condition peut s'écrire

$$\varphi(a,b,c,d)+\varphi(b,a,-d,-c)=3(a+b-2)-2ab+ab(bc-ad),$$

et l'on voit qu'on y satisfait en posant

$$\varphi(a,b,c,d)=3(b-1)+ab^2c-ab-ac-bd$$

233. Nous sommes ainsi amenés à considérer la fonction des quatre nombres a, b, c, d définie par l'égalité

$$(a,b,c,d)=e^{\frac{\mathrm{M}\pi i}{12}},$$

où M est un entier défini par l'équation

$$\mathrm{M} = \frac{a+d+[a, b]}{b} + 3(b-1) + ab^2c - ab - ac - bd$$

Nous n'imposons plus, pour le moment, aux nombres a, b d'autres conditions que d'être premiers entre eux et nous allons, dans cette hypothèse, établir les propriétés de la fonction (a, b, c, d). Tout d'abord, elle ne dépend que des deux nombres a, b, car si l'on y remplace c, d par $c+na$, $d+nb$, M est remplacé, comme il est aisé de le voir, par

$$\mathrm{M} + n(a^2-1)(b^2-1),$$

or l'un des nombres a, b est impair, l'un d'eux n'est pas divisible par 3, il en résulte que le produit $(a^2-1)(b^2-1)$ est divisible par 24; l'accroissement de M étant divisible par 24, la fonction (a, b, c, d) n'est pas modifiée par la substitution à c, d d'une solution quelconque de l'équation indéterminée $ay - bx = 1$. C'est ce que l'on avait annoncé.

Il conviendrait d'après cela de faire disparaître c, d du symbole (a, b, c, d) et d'écrire par exemple (a, b) au lieu de (a, b, c, d) Nous conserverons cependant la notation (a, b, c, d) pour faciliter au lecteur l'intelligence des calculs qui suivent. Il est entendu que si, a, b étant donnés, on adopte pour c, d une solution de l'équation indéterminée précédente, on pourrait tout aussi bien en adopter une autre.

234. Des calculs très faciles montrent qu'aux propriétés (1 — 9) établies pour le symbole $[a, b]$ correspondent pour le symbole (a, b, c, d) les suivantes

$$(a, b, c, d)(a, -b, -c, d) = -i,$$

$$(a+b, b, c+d, d) = e^{\frac{\pi i}{12} b(b^2-1)(2c+d)}(a, b, c, d),$$

$$(a, b, c, d)(b, a, -d, -c) = e^{-\frac{\pi i}{4}[(a-1)(b-1)-\operatorname{sgn}(ab)+1]},$$

$$(1, a, 0, 1) = e^{-\frac{\pi i}{4}(1-\operatorname{sgn} a)},$$

$$(-1, a, 0, -1) = e^{-\frac{\pi i}{4}(1+\operatorname{sgn} a-2a)},$$

$$\left(2, a, 1, \frac{a+1}{2}\right) = e^{-\frac{\pi i}{8}(-a^2+3-2\operatorname{sgn} a)}.$$

235. La troisième de ces formules coïncide avec la loi de réciprocité relative au symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ quand ab est positif : nous nous rapprocherons de ce dernier symbole en introduisant à la place de (a, b, c, d) le symbole $\left[\frac{a}{b}\right]$ relatif à deux entiers quelconques a, b premiers entre eux et défini par l'égalité

$$(a, b, c, d) = \left[\frac{a}{b}\right] e^{\frac{\pi i}{4}(\operatorname{sgn} b - 1)}.$$

Aux propriétés précédentes de la fonction numérique (a, b, c, d) correspondent les propriétés suivantes de la fonction numérique $\left[\frac{a}{b}\right]$, où a et b sont premiers entre eux,

$$[illegible] = \left[\frac{a}{b}\right] e^{\frac{\pi i}{12} b(b^2-1)(2c+d)},$$

$$[illegible] (b-1) - (\operatorname{sgn} a - 1)(\operatorname{sgn} b - 1)],$$

$$[illegible] = e^{\frac{\pi i}{4}(a - \operatorname{sgn} a)}, \qquad \left[\frac{2}{a}\right] = e^{\frac{\pi i}{8}(a^2-1)}.$$

En écrivant, en dernier lieu, $\left[\frac{2}{a}\right]$, on suppose naturellement que a soit impair. La troisième de ces formules pourrait être regardée comme la loi de réciprocité relative au symbole $\left[\frac{a}{b}\right]$.

236. Dans la seconde de ces formules figurent les nombres c, d dont elle est indépendante. En effet, si b est impair ou s'il est divisible par 8, le nombre $b(b^2 - 1)$ est évidemment divisible par 24 ; dans ces deux cas on a

$$\left[\frac{a+b}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$$

et, en général,

$$\left[\frac{a'}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$$

si a est congru à a' (mod. b). Si b est le double d'un nombre pair sans être divisible par 8, $b(b^2 - 1)$ est divisible par 12 et, comme $2c + d$ est impair, on a

$$\left[\frac{a+b}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] e^{\frac{\pi i}{12} b(b^2-1)} = (-1)^{\frac{b(b^2-1)}{12}} \left[\frac{a}{b}\right].$$

Enfin, si b est le double d'un nombre impair, comme on a

$$a(2c+d)=1+c(b+2a),$$

et que $b+2a$ est divisible par 4, on en conclut que $2c+d$ est de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n-1$ suivant que a est d'une forme ou de l'autre. On a donc

$$\left[\frac{a+b}{b}\right]=\left[\frac{a}{b}\right]e^{\pm\frac{\pi i}{12}b(b^2-1)}=\left[\frac{a}{b}\right]i^{\pm\frac{b(b^2-1)}{6}},$$

où il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que a est congru à $+1$ ou à -1 (mod. 4).

Il résulte aisément des diverses propriétés du symbole $\left[\frac{a}{b}\right]$ que ce symbole est toujours égal à l'un des quatre nombres ± 1, $\pm i$. Il suffit de raisonner sur ce symbole comme on a fait au n° 229 sur le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$.

237. Dans le cas où a, b sont des nombres impairs dont l'un au moins est positif, on voit que l'on a

$$\left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{a}{-b}\right]=1,\qquad \left[\frac{a+nb}{b}\right]=\left[\frac{a}{b}\right],$$

$$\left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{b}{a}\right]=(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}},$$

$$\left[\frac{1}{a}\right]=1,\qquad \left[\frac{-1}{a}\right]=(-1)^{\frac{a-1}{2}}$$

La dernière formule suppose naturellement que a soit positif.

On en conclut que si a, b sont deux nombres impairs, premiers entre eux et dont l'un au moins est positif, le symbole $\left[\frac{a}{b}\right]$ est identique au symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ de Legendre, généralisé par Jacobi

Lorsque a est pair et b impair, on doit prendre

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a+nb}{b}\right),$$

où n désigne un nombre impair; mais alors $a+nb$ étant impair et l'un des nombres $a+nb$, b étant positif, $\left[\frac{a+nb}{b}\right]$ est iden-

tique à $\left(\frac{a+nb}{b}\right)$ en vertu des remarques antérieures relatives à $\left[\frac{a}{b}\right]$.

Le symbole $\left[\frac{a}{b}\right]$ est donc identique au symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ *dans tous les cas où ce dernier symbole a été défini :* il doit en être regardé comme la généralisation.

238. Si l'on applique successivement les relations (θ), (ν) et (ρ), on a

$$e^{\frac{N\pi i}{12}} = e^{\frac{a+d+[a,b]}{12b}\pi i} = (a, b, c, d)\, e^{-\frac{\pi i}{12}[3(b-1)+ab^2c-ab-ac-bd]}$$
$$= \left[\frac{a}{b}\right] e^{-\frac{\pi i}{12}(3b+ab^2c-ab-ac-bd-3\operatorname{sgn} b)}.$$

En réunissant les résultats acquis, on voit donc que l'on peut mettre dans tous les cas la relation (δ) sous la forme

$$(\mathrm{XLV}_{15}) \qquad \mathrm{h}(\mathrm{T}) = \left[\frac{a}{b}\right] e^{-\frac{\pi i}{12}[3(b-\operatorname{sgn} b)+ac(b^2-1)-b(a+d)]} \sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}\,\mathrm{h}(\tau),$$

l'argument de $\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}$ étant compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$ et le symbole $\left[\frac{a}{b}\right]$ étant défini par les propriétés ci-dessus du n° 237 qui permettent de le calculer.

239. On en déduit immédiatement les valeurs des racines huitièmes de l'unité ε, ε', ε'', ε''' qui figurent dans les formules (XLII)

D'après la formule (β), on a, dans tous les cas,

$$\mathrm{h}(\mathrm{T}) = \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sqrt{a+b\tau}\,\mathrm{h}(\tau)$$

En élevant au cube les deux membres de cette relation, puis remplaçant $\mathrm{h}^3(\mathrm{T})$ par sa valeur tirée de la relation (XLV_{15}), on a immédiatement

$$(\mathrm{XLII}_5) \qquad \varepsilon = \left[\frac{a}{b}\right]^3 i^{\frac{ab+ac+bd-acb^2-3b}{2}},$$

d'où, par les formules (XLII_{7-8}),

$$\varepsilon', \quad \varepsilon'', \quad \varepsilon'''$$

Le problème posé au n° 179 est donc résolu.

240 On peut écrire la formule (XLV_{15}) d'une manière un peu différente de façon à n'y faire figurer que le symbole de Legendre-Jacobi.

L'un des nombres a, b est impair et comme l'on peut dans $T = \frac{c+d\tau}{a+b\tau}$ changer les signes de a, b, c, d, on peut toujours supposer que c'est le nombre dont on sait qu'il est impair qui est positif.

On distinguera donc deux cas :

1° b impair et positif Alors on a

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left(\frac{a}{b}\right), \qquad \operatorname{sgn} b = 1,$$

et, comme on l'a vu au n° 218,

$$\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2} = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a+b\tau},$$

la partie réelle de la racine carrée étant positive.

Mais, comme b est positif, on a aussi

$$e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a+b\tau} = \sqrt{-i(a+b\tau)},$$

si l'on entend par $\sqrt{-i(a+b\tau)}$ celle des deux déterminations de la racine dont la partie réelle est positive : les arguments des deux quantités $e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a+b\tau}$ et $\sqrt{-i(a+b\tau)}$, dont les carrés sont égaux, sont, en effet, tous deux compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$.

On a donc, dans ce premier cas, puisque b^2-1 est divisible par 8,

$$(XLV_{16}) \quad h(T) = \left(\frac{a}{b}\right) i^{\frac{1-b}{2}} e^{-\frac{\pi i}{12}[ac(b^2-1)-b(a+d)]}\sqrt{-i(a+b\tau)}\, h(\tau)$$

2° a impair et positif. En appliquant la loi de réciprocité du symbole $\left[\frac{a}{b}\right]$ donnée au n° 235, on a, puisque a est positif,

$$\left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{b}{a}\right] = e^{-\frac{\pi i}{4}(a-1)(b-1)}.$$

Mais, puisque a est impair, $\left[\frac{b}{a}\right]$ est certainement identique à $\left(\frac{b}{a}\right)$, dont la valeur est $+1$ ou -1, on peut donc écrire

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left(\frac{b}{a}\right) e^{-\frac{\pi i}{4}(a-1)(b-1)}$$

D'ailleurs, comme on l'a vu au n° **218**, on a aussi

$$\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2} = e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} b}\sqrt{a+b\tau},$$

la partie réelle de la racine carrée étant positive. On a donc, dans ce second cas,

$$\mathrm{h}(\mathrm{T}) = \left(\frac{b}{a}\right) e^{-\frac{\pi i}{12}[3b+3(a-1)(b-1)+ac(b^2-1)-b(a+d)]}\sqrt{a+b\tau}\,\mathrm{h}(\tau).$$

Le coefficient de $-\frac{\pi i}{12}$ dans l'exponentielle est égal à

$$3(1-a)+2ab+acb^2-ac-bd = 3(1-a)+ab+a^2bd-ac-bd,$$

on aura donc finalement

$$(\mathrm{XLVI}_6)\qquad \mathrm{h}(\mathrm{T}) = \left(\frac{b}{a}\right) i^{\frac{a-1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{12}[a(b-c)+bd(a^2-1)]}\sqrt{a+b\tau}\,\mathrm{h}(\tau)$$

Les formules (XLVI_{5-6}) ont été données par M. Weber [1], qui en a présenté la demonstration sous forme de vérification

241. On peut aussi écrire la formule (XLII_5) de manière à n'y faire figurer que le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ de Legendre-Jacobi; il faut encore distinguer le cas où b est impair et positif de celui où a est impair et positif. On arrive aisément aux résultats que voici .

1° Si b est impair et positif, on a

$$(\mathrm{XLII}_6)\qquad \varepsilon = \left(\frac{a}{b}\right) i^{\frac{b(a+d-3)}{2}}.$$

2° Si a est impair et positif, on a

$$(\mathrm{XLII}_6)\qquad \varepsilon = \left(\frac{b}{a}\right) i^{\frac{a(3-b+c)-3}{2}}.$$

---

(1) *Elliptische Functionen*, p 100

Si l'on suppose que a et b sont impairs et positifs, ce qui ne peut arriver que dans les cas 3° et 4° du Tableau (XX_6), les deux formules coïncident, comme il résulte immédiatement de la loi de réciprocité et de la congruence

$$ab - ac + bd - 2a - 2b + 2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 8)$$

qui a lieu en vertu de la relation $ad - bc = 1$, lorsque des quatre nombres entiers a, b, c, d, un seul, c ou d, est pair.

§ VII — Transformation quadratique des fonctions Thêta.

242. Aux formules précédentes qui concernent le cas où les quatre entiers a, b, c, d caractérisant la transformation considérée sont liés par la relation $ad - bc = 1$, viennent s'ajouter, comme dans l'étude des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$, d'autres formules qui concernent le cas où le déterminant $ad - bc$ est un entier quelconque Cet entier est l'*ordre* de la transformation. Nous envisagerons d'abord le cas où il est égal à 2.

Le raisonnement du n° 130 s'applique aux fonctions $\vartheta(v)$ aussi bien qu'aux fonctions σu, $\sigma_\alpha u$, avec cette restriction que les systèmes de demi-périodes improprement équivalents au système (ω_1, ω_3) sont exclus (n° 151) pour les fonctions $\vartheta(v)$. Il suffit donc de considérer la transformation d'ordre 2 où l'on change ω_1 en $\frac{\omega_1}{2}$ sans changer ω_3, ce qui revient à changer v en $2v$ et τ en 2τ, et la transformation d'ordre 2 où l'on change ω_3 en $\frac{\omega_3}{2}$ sans changer ω_1, ce qui revient à changer simplement τ en $\frac{\tau}{2}$. La première de ces deux transformations est la transformation de Landen, la seconde est la transformation de Gauss.

243 En combinant les formules concernant ces deux transformations et celles que l'on en déduit immédiatement concernant les transformations inverses, entre elles et avec celles déjà établies qui concernent la transformation linéaire, on aura toutes les formules de transformation quadratique des fonctions $\vartheta(v)$. Les formules de transformation dont l'ordre est une puissance entière de 2 s'obtiendront de même, par la combinaison et la répétition des transformations précédemment définies

244. Nous allons donc chercher à exprimer, d'une part, les fonctions $\mathfrak{S}(2v \mid 2\tau)$, d'autre part les fonctions $\mathfrak{S}\left(v \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right)$, au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v \mid \tau)$.

Nous désignerons, comme nous l'avons déjà fait à propos des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$, par de petites capitales, les constantes relatives aux fonctions $\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right)$, $\sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right)$ et $\mathfrak{S}(2v \mid 2\tau)$. Ainsi nous poserons

$$
(\text{XLVII}_1)\quad
\begin{cases}
\mathrm{Q} = q^2 = e^{2\tau\pi i}, \\
\mathrm{Q}_0 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 - q^{4\nu}), & \mathrm{Q}_1 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 + q^{4\nu}), \\
\mathrm{Q}_2 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 + q^{2(2\nu-1)}), & \mathrm{Q}_3 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 - q^{2(2\nu-1)})
\end{cases}
$$

Les quantités Q, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 sont d'ailleurs liées par les mêmes relations algébriques (XXVIII_{5-6}) que les quantités q, q_0, q_1, q_2, q_3.

Nous désignerons de même par de petites capitales accentuées les constantes relatives aux fonctions $\sigma\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right)$, $\sigma_\alpha\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right)$ et $\mathfrak{S}\left(v \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right)$. Ainsi

$$
(\text{XLVIII}_1)\quad
\begin{cases}
\mathrm{Q}' = q^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\tau\pi i}{2}}, \\
\mathrm{Q}'_0 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 - q^{\nu}), & \mathrm{Q}'_1 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 + q^{\nu}), \\
\mathrm{Q}'_2 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1 + q^{\nu-\frac{1}{2}}\right), & \mathrm{Q}'_3 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1 - q^{\nu-\frac{1}{2}}\right).
\end{cases}
$$

On a évidemment, d'après les expressions de Q_0, Q_3,

$$
(\text{XLVII}_2)\qquad \mathrm{Q}_0 = q_0 q_1, \qquad \mathrm{Q}_3 = q_2 q_3 = \frac{1}{q_1},
$$

d'où l'on tire inversement

$$
q_3 = \mathrm{Q}_0 \mathrm{Q}_3, \qquad q_1 = \frac{1}{\mathrm{Q}_3}.
$$

De même, d'après les expressions de Q'_0, Q'_1, Q'_2, Q'_3, on a

$$q_0 = Q'_0 Q'_1, \qquad q_3 = Q'_2 Q'_3 = \frac{1}{Q'_1},$$

d'où l'on tire inversement

$$(\text{XLVIII}_2) \qquad Q'_0 = q_0 q_3, \qquad Q'_1 = \frac{1}{q_3} = q_1 q_2$$

245. *Transformation de Landen* — Si l'on passe des fonctions σ, σ_α aux fonctions ϑ au moyen des formules (XXXIII$_{1-4}$), on a le moyen d'exprimer les fonctions $\vartheta(2v\,|\,2\tau)$ au moyen des fonctions $\vartheta(v\,|\,\tau)$. Par exemple, la formule (XXII$_1$)

$$\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right) = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma u \sigma_1 u$$

donne immédiatement

$$\frac{\omega_1 \vartheta_1(2v\,|\,2\tau)}{2\pi Q_0^3 Q^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{\text{H}_1 u^2}{\omega_1}} = e^{\frac{\eta_1 u^2}{\omega_1} + \frac{e_1 u^2}{2}} \frac{\omega_1 \vartheta_1 v \vartheta_2 v}{2\pi q^{\frac{1}{2}} q_0^4 q_1^2}.$$

A cause de la valeur (XXII$_4$) de H_1, on voit que le facteur exponentiel est le même dans les deux membres, on trouve ensuite très facilement, en réduisant au moyen des relations déjà écrites (XLVII$_2$) entre Q_0, Q_3, q_0, q_1, q_2, q_3, la formule

$$\vartheta_1(2v\,|\,2\tau) = \frac{q_1}{q_0} \vartheta_1(v) \vartheta_2(v)$$

On a d'ailleurs

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{1}{Q_0 Q_3^2} = \frac{1}{\vartheta'_4(0\,|\,2\tau)},$$

la dernière égalité ayant lieu en vertu des formules (XXXVI$_2$) qui seront d'un usage constant dans ce qui suit

On trouve de la même façon, au moyen de la formule (XXIII$_3$),

$$\sigma_3\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right) = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma_2 u \sigma_3 u,$$

la relation

$$\vartheta_4(2v\,|\,2\tau) = \frac{q_1}{q_0} \vartheta_3(v) \vartheta_4(v)$$

Au reste cette dernière relation aurait pu aussi bien se déduire de

celle relative à $\mathfrak{S}_1(2v\,|\,2\tau)$ en remplaçant v par $v+\frac{\tau}{2}$ et en se servant des formules (XXXIV$_6$). On a, en effet, par ces formules

$$\mathfrak{S}_1(2v+\tau\,|\,2\tau) = iQ^{-\frac{1}{4}}e^{-2i\pi v}\,\mathfrak{S}_4(2v\,|\,2\tau),$$

$$\mathfrak{S}_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\,\mathfrak{S}_4(v),$$

$$\mathfrak{S}_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}\,\mathfrak{S}_3(v),$$

et il suffit de remplacer dans l'égalité qui donne l'expression de $\mathfrak{S}_1(2v\,|\,2\tau)$, pour avoir celle qui fournit l'expression de $\mathfrak{S}_4(2v\,|\,2\tau)$. Inversement, par la même opération, on passerait de cette seconde formule à la première.

Si maintenant on fait la substitution des fonctions $\mathfrak{S}$ aux fonctions σ dans les formules (XXIII$_1$); si l'on remplace ensuite $\sqrt{e_1-e_2}$, $\sqrt{e_1-e_3}$ par leurs valeurs (XXXVI$_{2,4}$)

$$\sqrt{e_1-e_2} = \frac{\pi}{2\omega_1}q_0^2 q_3^{\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2\omega_1}q_0^2 q_2^{\frac{1}{2}},$$

on obtient aussi

$$\frac{\mathfrak{S}_2(2v\,|\,2\tau)}{2Q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2} = \frac{\mathfrak{S}_2^2(v)-\mathfrak{S}_1^2(v)}{4q^{\frac{1}{4}}q_0^2 q_1^4} = \frac{\mathfrak{S}_3^2(v)-\mathfrak{S}_4^2(v)}{q_0^2(q_2^4-q_3^4)}$$

D'ailleurs on trouve très aisément

$$\frac{2Q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2}{4q^{\frac{1}{4}}q_0^2q_1^4} = \frac{1}{2Q_0Q_2^2} = \frac{1}{2\mathfrak{S}_3(0\,|\,2\tau)}.$$

On a donc

$$\mathfrak{S}_2(2v\,|\,2\tau) = \frac{1}{2Q_0Q_2^2}[\mathfrak{S}_2^2(v)-\mathfrak{S}_1^2(v)] = \frac{2Q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2}{q_0^2(q_2^4-q_3^4)}[\mathfrak{S}_3^2(v)-\mathfrak{S}_4^2(v)].$$

Exactement de même, en partant des formules (XXIII$_2$), on trouve

$$\mathfrak{S}_3(2v\,|\,2\tau) = \frac{1}{4Q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2}[\mathfrak{S}_1^2(v)+\mathfrak{S}_2^2(v)] = \frac{Q_0Q_2^2}{q_0^2(q_2^4+q_3^4)}[\mathfrak{S}_3^2(v)+\mathfrak{S}_4^2(v)]$$

et l'on a d'ailleurs

$$4Q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2 = 2\mathfrak{S}_2(0\,|\,2\tau).$$

246. On prévoit que l'on doit pouvoir transformer l'une dans l'autre les relations qui fournissent les expressions de $\vartheta_2(2v\,|\,2\tau)$, $\vartheta_3(2v\,|\,2\tau)$, en changeant v en $v+\frac{\tau}{2}$ et en se servant des formules (XXXIV$_6$) Mais tandis que, tout à l'heure, ce changement ne nous a rien donné de plus que ce que nous savions déjà, il va, cette fois, nous donner des relations entre les constantes Si, en effet, dans les relations du numéro précédent, on change v en $v+\frac{\tau}{2}$, on trouve, après des réductions immédiates,

$$\vartheta_3(2v\,|\,2\tau)=\frac{1}{2Q_0Q_2^2}\,[\vartheta_3^2(v)+\vartheta_4^2(v)]=\frac{2Q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2}{q_0^2(q_2^4-q_3^4)}[\vartheta_1^2(v)+\vartheta_2^2(v)],$$

$$\vartheta_2(2v\,|\,2\tau)=\frac{1}{4Q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2}\,[\vartheta_3^2(v)-\vartheta_4^2(v)]=\frac{Q_0Q_2^2}{q_0^2(q_2^4+q_3^4)}[\vartheta_2^2(v)-\vartheta_1^2(v)].$$

Ces formules comparées aux précédentes donnent

$$\frac{1}{2\vartheta_2(0\,|\,2\tau)}=\frac{1}{4Q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2}=\frac{2Q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2}{q_0^2(q_2^4-q_3^4)}=\frac{\vartheta_2(0\,|\,2\tau)}{\vartheta_3^2(0)-\vartheta_4^2(0)},$$

$$\frac{1}{2\vartheta_3(0\,|\,2\tau)}=\frac{1}{2Q_0Q_2^2}=\frac{Q_0Q_2^2}{q_0^2(q_2^4+q_3^4)}=\frac{\vartheta_3(0\,|\,2\tau)}{\vartheta_3^2(0)+\vartheta_4^2(0)}.$$

On a donc

$$(\text{XLVII}_3)\quad\begin{cases}\vartheta_1(2v\,|\,2\tau)=\dfrac{\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(0\,|\,2\tau)},\\[2mm] \vartheta_2(2v\,|\,2\tau)=\dfrac{\vartheta_2^2(v)-\vartheta_1^2(v)}{2\vartheta_3(0\,|\,2\tau)}=\dfrac{\vartheta_3^2(v)-\vartheta_4^2(v)}{2\vartheta_2(0\,|\,2\tau)},\\[2mm] \vartheta_3(2v\,|\,2\tau)=\dfrac{\vartheta_2^2(v)+\vartheta_1^2(v)}{2\vartheta_2(0\,|\,2\tau)}=\dfrac{\vartheta_3^2(v)+\vartheta_4^2(v)}{2\vartheta_3(0\,|\,2\tau)},\\[2mm] \vartheta_4(2v\,|\,2\tau)=\dfrac{\vartheta_3(v)\,\vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0\,|\,2\tau)},\end{cases}$$

et l'on a, d'autre part,

$$(\text{XLVII}_4)\quad\begin{cases}2\vartheta_2^2(0\,|\,2\tau)=\vartheta_3^2(0)-\vartheta_4^2(0),\\ 2\vartheta_3^2(0\,|\,2\tau)=\vartheta_3^2(0)+\vartheta_4^2(0),\end{cases}$$

relations auxquelles il convient d'adjoindre les relations suivantes obtenues en faisant $v=0$ dans les deux dernières formules de

transformation et dans la première divisée préalablement par v,

$$(\mathrm{XLVII}_4)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{S}_2(0\,|\,2\tau)\,\mathfrak{S}_3(0\,|\,2\tau) = \mathfrak{S}_2^2(0), \\ \mathfrak{S}_4^2(0\,|\,2\tau) = \mathfrak{S}_3(0)\,\mathfrak{S}_4(0), \\ 2\mathfrak{S}_1'(0\,|\,2\tau)\,\mathfrak{S}_4(0\,|\,2\tau) = \mathfrak{S}_1'(0)\,\mathfrak{S}_2(0) \end{cases}$$

Les deux avant-dernières formules sont d'ailleurs une conséquence des relations (XLVII$_2$)

$$Q_0 = q_0 q_1, \quad Q_3 = q_2 q_3,$$

de même que celles qui les précèdent équivalent à celles-ci

$$(\mathrm{XLVII}_2)\quad \begin{cases} 2Q_0^2 Q_2^4 = q_0^2(q_2^4 + q_3^4), \\ 8Q^{\frac{1}{2}} Q_0^2 Q_1^4 = q_0^2(q_2^4 - q_3^4) \end{cases}$$

Ainsi, comme on a $Q^{\frac{1}{2}} = q$, on voit que les quantités Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 s'expriment algébriquement au moyen de q, q_0, q_1, q_2, q_3 De même pour les fonctions $\mathfrak{S}_1'(0\,|\,2\tau)$, $\mathfrak{S}_2(0\,|\,2\tau)$, $\mathfrak{S}_3(0\,|\,2\tau)$, $\mathfrak{S}_4(0\,|\,2\tau)$ et les fonctions $\mathfrak{S}_1'(0)$, $\mathfrak{S}_2(0)$, $\mathfrak{S}_3(0)$, $\mathfrak{S}_4(0)$ de la variable τ

247. *Transformation de Gauss* — Les formules (XXIV$_1$, XXV$_{1-3}$) qui expriment $\sigma\left(u\,|\,\omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right)$, $\sigma_\alpha\left(u\,|\,\omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right)$ au moyen de $\sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_3)$, $\sigma_\alpha(u\,|\,\omega_1, \omega_3)$, permettent d'exprimer, d'une manière toute semblable les fonctions $\mathfrak{S}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v\,|\,\tau)$ Nous ne développerons pas les calculs qui présentent exactement les mêmes circonstances que ceux de la transformation de Landen, que nous venons de faire.

On trouve directement, au moyen des formules (XXIV$_1$, XXV$_1$),

$$\mathfrak{S}_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\mathfrak{S}_1(v)\,\mathfrak{S}_4(v)}{Q'^{\frac{1}{4}} Q_0' Q_1'^2} = \frac{2\mathfrak{S}_1(v)\,\mathfrak{S}_4(v)}{\mathfrak{S}_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},$$

$$\mathfrak{S}_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\mathfrak{S}_2(v)\,\mathfrak{S}_3(v)}{Q'^{\frac{1}{4}} Q_0' Q_1'^2} = \frac{2\mathfrak{S}_2(v)\,\mathfrak{S}_3(v)}{\mathfrak{S}_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},$$

et l'on passe d'une formule à l'autre par le changement de v en $v + \frac{1}{2}$. Au moyen des formules (XXV$_{2-3}$), et en tenant compte

de la relation (XXIV$_4$),

$$\mathrm{H}'_1 = 2\eta_1 + e_3\omega_1,$$

on a ensuite

$$\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{Q}'_0\mathrm{Q}'^2_3}[\vartheta_4^2(v) - \vartheta_1^2(v)] = \frac{\mathrm{Q}'_0\mathrm{Q}'^2_2}{q_0^2\left(q_2^4 + 4q^{\frac{1}{2}}q_1^4\right)}[\vartheta_3^2(v) - \vartheta_2^2(v)],$$

$$\vartheta_4\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{Q}'_0\mathrm{Q}'^2_2}[\vartheta_4^2(v) + \vartheta_1^2(v)] = \frac{\mathrm{Q}'_0\mathrm{Q}'^2_3[\vartheta_3^2(v) - \vartheta_2^2(v)]}{q_0^2\left(q_2^4 - 4q^{\frac{1}{2}}q_1^4\right)},$$

puis, par le changement de v en $v + \frac{1}{2}$,

$$\vartheta_4\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{Q}'_0\mathrm{Q}'^2_3}[\vartheta_3^2(v) - \vartheta_2^2(v)] = \frac{\mathrm{Q}'_0\mathrm{Q}'^2_2[\vartheta_4^2(v) + \vartheta_1^2(v)]}{q_0^2\left(q_2^4 + 4q^{\frac{1}{2}}q_1^4\right)},$$

$$\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{Q}'_0\mathrm{Q}'^2_2}[\vartheta_3^2(v) + \vartheta_2^2(v)] = \frac{\mathrm{Q}'_0\mathrm{Q}'^2_3[\vartheta_4^2(v) - \vartheta_1^2(v)]}{q_0^2\left(q_2^4 - 4q^{\frac{1}{2}}q_1^4\right)},$$

d'où l'on conclut les formules

$$(\text{XLVIII}_3)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) &= \frac{2\vartheta_1(v)\vartheta_4(v)}{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},\\
\vartheta_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) &= \frac{2\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},\\
\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) &= \frac{\vartheta_4^2(v) - \vartheta_1^2(v)}{\vartheta_4\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{\vartheta_3^2(v) + \vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},\\
\vartheta_4\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) &= \frac{\vartheta_4^2(v) + \vartheta_1^2(v)}{\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{\vartheta_3^2(v) - \vartheta_2^2(v)}{\vartheta_4\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},
\end{aligned}\right.$$

et les relations

$$(\text{XLVIII}_4)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta'_1\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) &= 2\vartheta'_1(0)\vartheta_4(0),\\
\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_4\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) &= \vartheta_4^2(0),\\
\vartheta_2^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) &= 2\vartheta_2(0)\vartheta_3(0),\\
\vartheta_3^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) &= \vartheta_3^2(0) + \vartheta_2^2(0),\\
\vartheta_4^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) &= \vartheta_3^2(0) - \vartheta_2^2(0),
\end{aligned}\right.$$

qui équivalent aux suivantes :

$$(\mathrm{XLVIII}_2)\qquad \begin{cases} Q_0' = q_0 q_3, \qquad Q_1' = q_1 q_2, \\ 2 q_0^2 q_2^4 = Q_0'^2 [Q_2'^4 + Q_3'^4], \\ 8 q^{\frac{1}{2}} q_0^2 q_1^4 = Q_0'^2 [Q_2'^4 - Q_3'^4], \end{cases}$$

dont les deux premières ont déja été établies au n° **244**.

On peut vérifier que les relations (XLVIII_1) sont, au fond, identiques aux relations (XLVII_1) ; on passe des unes aux autres en changeant τ en $\frac{\tau}{2}$.

248. Les relations (XLVII_2) qui lient algébriquement les quantités q, q_0, q_1, q_2, q_3 aux quantités Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 et les relations (XLVIII_2) qui lient algébriquement les quantités Q', Q_0', Q_1', Q_2', Q_3' aux quantités q_0, q_1, q_2, q_3 permettent d'établir des formules intéressantes concernant la transformation quadratique des fonctions modulaires $h(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$

La définition de la fonction $h(\tau)$ donne

$$h(2\tau) = Q^{\frac{1}{12}} Q_0 = q^{\frac{1}{6}} q_0 q_1,$$

en élevant les deux membres au carré et en faisant usage de la relation (XXXVI_2), $\vartheta_2(0) = 2 q_0 q_1^2 q^{\frac{1}{4}}$, on a donc

$$(\mathrm{XLIX}_1)\qquad 2\,h^2(2\tau) = h(\tau)\,\vartheta_2(0)$$

On a de même

$$h\left(\frac{\tau}{2}\right) = Q'^{\frac{1}{12}} Q_0',$$

d'où, en faisant usage de la relation $\vartheta_4(0) = q_0 q_3^2$,

$$(\mathrm{XLIX}_2)\qquad h^2\left(\frac{\tau}{2}\right) = h(\tau)\,\vartheta_4(0)$$

En changeant dans cette dernière égalité τ en $\tau + 1$, et en faisant usage des égalités (XLIII_{12}) et (XLV_1),

$$\vartheta_4(0 \mid \tau + 1) = \vartheta_3(0), \qquad h(\tau + 1) = \sqrt[6]{i}\,h(\tau),$$

on a aussi

$$(\mathrm{XLIX}_3)\qquad h^2\left(\frac{\tau + 1}{2}\right) = \sqrt[6]{i}\,h(\tau)\,\vartheta_3(0)$$

249. Si l'on résout par rapport à q_1, q_2, q_3 les équations ($\mathrm{XXXVIII}_{1,2,5}$) qui définissent $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$, on trouve

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\,q^{\frac{1}{12}}}\frac{\varphi(\tau)}{\chi(\tau)}, \qquad q_2 = \frac{\sqrt[6]{2}\,q^{\frac{1}{24}}}{\chi(\tau)}, \qquad q_3 = \sqrt[6]{2}\,q^{\frac{1}{24}}\frac{\psi(\tau)}{\chi(\tau)},$$

et l'on aura de même

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\,q^{\frac{1}{6}}}\frac{\varphi(2\tau)}{\chi(2\tau)}, \qquad Q_2 = \frac{\sqrt[6]{2}\,q^{\frac{1}{12}}}{\chi(2\tau)}, \qquad Q_3 = \sqrt[6]{2}\,q^{\frac{1}{12}}\frac{\psi(2\tau)}{\chi(2\tau)}$$

En portant ces valeurs dans les relations (XLVII_2)

$$Q_3 = q_2 q_3, \qquad Q_2^4 = \frac{q_2^4 + q_3^4}{2q_1^2}, \qquad Q_1^4 = \frac{q_2^4 - q_3^4}{8qq_1^2},$$

on trouve, après des réductions immédiates, les trois formules

$$\frac{\psi(2\tau)}{\chi(2\tau)} = \sqrt[6]{2}\,\frac{\psi(\tau)}{\chi^2(\tau)},$$

$$\sqrt[3]{2}\,\chi^2(\tau)\,\varphi^2(\tau) = \chi^4(2\tau)[1 + \psi^4(\tau)],$$

$$\sqrt[3]{2}\,\chi^2(\tau)\,\varphi^2(\tau)\,\varphi^4(2\tau) = \chi^4(2\tau)[1 - \psi^4(\tau)]$$

A cause de la relation $\chi^3(\tau) = \varphi(\tau)\,\psi(\tau)$, la première de ces formules peut s'écrire

$$(\mathrm{XLIX}_4) \qquad \psi(2\tau)\,\varphi(\tau) = \sqrt[6]{2}\,\chi(\tau)\,\chi(2\tau),$$

en éliminant $\chi^{24}(\tau)$, on a ensuite, à l'aide des deux autres formules, les relations

$$(\mathrm{XLIX}_5) \qquad \varphi^4(2\tau) = \frac{1 - \psi^4(\tau)}{1 + \psi^4(\tau)}, \qquad \psi^4(2\tau) = \frac{2\psi^2(\tau)}{1 + \psi^4(\tau)}.$$

A cause de la formule $\varphi^8(\tau) + \psi^8(\tau) = 1$, on a aussi

$$\varphi^4(2\tau) = \frac{\varphi^8(\tau)}{[1 + \psi^4(\tau)]^2},$$

d'où l'on tire, en extrayant la racine carrée et en observant que les deux membres doivent être positifs pour τ purement imagi-

naire,

$$(\text{XLIX}_6) \qquad \varphi^2(2\tau) = \frac{\varphi^4(\tau)}{1+\psi^4(\tau)} = \frac{1-\psi^4(\tau)}{\varphi^4(\tau)}.$$

250. En remarquant que la transformation quadratique $\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)$ équivaut à la suite de transformations

$$\left(1+\tau,\ 2\tau,\ -\frac{1}{\tau},\ 1+\tau\right),$$

en appliquant ce résultat à la fonction $\chi(\tau)$ et en tenant compte des formules (XLV) et (XLIX$_4$), on trouve sans peine

$$(\text{XLIX}_7) \qquad \chi\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}\,\chi(\tau)}.$$

Observons aussi qu'en changeant τ en $\frac{\tau}{2}$ dans les formules précédentes, on en tire

$$\psi^4\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1-\varphi^4(\tau)}{1+\varphi^4(\tau)},$$

$$\psi^2\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1-\varphi^4(\tau)}{\psi^4(\tau)} = \frac{\psi^4(\tau)}{1+\varphi^4(\tau)},$$

$$\varphi^4\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2\varphi^2(\tau)}{1+\varphi^4(\tau)}.$$

251. Enfin les résultats précédents permettent encore de ramener les fonctions φ, ψ, χ à la seule fonction h

Dans la formule $Q_0' = q_0 q_3$, changeons τ en $1+\tau$ et désignons par Q_0'' ce que devient le premier membre; comme q_0 ne change manifestement pas, et que q_3 se transforme en q_2, on aura

$$Q_0'' = q_0 q_2$$

Soit aussi

$$Q'' = e^{\frac{\tau+1}{2}\pi i} = i q^{\frac{1}{2}},$$

on aura

$$\mathrm{h}\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = Q''^{\frac{1}{12}} Q_0'' = \sqrt[12]{i}\, q^{\frac{1}{24}} q_0 q_2,$$

d'où, en se reportant aux expressions de $\mathrm{h}(2\tau) = q^{\frac{1}{6}} q_0 q_1$, $\mathrm{h}\left(\frac{\tau}{2}\right) = q^{\frac{1}{24}} q_0 q_3$ et aux définitions des fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$,

$\chi(\tau)$, on trouve de suite

$$(\text{XLIX}_8)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \sqrt{2}\,\sqrt[12]{i}\,\frac{\mathrm{h}(2\tau)}{\mathrm{h}\left(\frac{\tau+1}{2}\right)},\\ \psi(\tau) &= \sqrt[12]{i}\,\frac{\mathrm{h}\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\mathrm{h}\left(\frac{\tau+1}{2}\right)},\\ \chi(\tau) &= \sqrt[6]{2}\,\sqrt[12]{i}\,\frac{\mathrm{h}(\tau)}{\mathrm{h}\left(\frac{\tau+1}{2}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Nous nous contenterons d'observer (¹), relativement à ces formules, qu'elles permettent de déduire les formules de transformation linéaire des fonctions modulaires $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$, de celles que nous avons établies pour $\mathrm{h}(\tau)$. On obtient ainsi, dans les six cas du Tableau (XX_6), des formules équivalentes aux formules ($\text{XLVI}_{1..2}$), mais affectant une forme différente.

252. Les formules

$$(\text{XLIX}_9)\quad \left\{\begin{aligned} q_0 &= e^{-\frac{\tau\pi i}{12}}\,\mathrm{h}(\tau), & q_1 &= e^{-\frac{\tau\pi i}{12}}\,\frac{\mathrm{h}(2\tau)}{\mathrm{h}(\tau)},\\ q_2 &= e^{\frac{(\tau-1)\pi i}{24}}\,\frac{\mathrm{h}\left(\frac{\tau+1}{2}\right)}{\mathrm{h}(\tau)}, & q_3 &= e^{\frac{\tau\pi i}{24}}\,\frac{\mathrm{h}'\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\mathrm{h}(\tau)},\end{aligned}\right.$$

qui expriment q_0, q_1, q_2, q_3 en fonction de τ, se déduisent immédiatement des formules de définition des fonctions $h(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ et des formules (XLIX_8)

253 En combinant les transformations de Landen et de Gauss, on obtient les expressions de $\vartheta_1(2v)$, $\vartheta_{\alpha+1}(2v)$ au moyen des fonctions $\vartheta(v)$.

La première des formules (XLVII_3), par exemple, peut s'écrire,

---

(¹) Cette intéressante remarque est due à M Dedekind *Ueber die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (*Journal de Crelle*, t. LVIII, p 283) Dans les *Elliptische Functionen* de M Weber, les résultats sont donnés pour les fonctions $f(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau)$

en changeant τ en $\frac{\tau}{2}$,

$$\mathfrak{S}_1(2v\,|\,\tau) = \frac{\mathfrak{S}_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\mathfrak{S}_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)}{\mathfrak{S}_4(0\,|\,\tau)};$$

mais, d'après la formule (XLVIII_3), on a

$$\mathfrak{S}_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2\mathfrak{S}_1(v\,|\,\tau)\mathfrak{S}_4(v\,|\,\tau)}{\mathfrak{S}_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},$$

$$\mathfrak{S}_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2\mathfrak{S}_2(v\,|\,\tau)\mathfrak{S}_3(v\,|\,\tau)}{\mathfrak{S}_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},$$

donc, comme, d'après la formule (XLVIII_4), on peut remplacer $\mathfrak{S}_2^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)$ par le produit $2\,\mathfrak{S}_2(0\,|\,\tau)\,\mathfrak{S}_3(0\,|\,\tau)$, on obtient la relation

$$\text{(L)}\qquad \mathfrak{S}_1(2v) = \frac{2\,\mathfrak{S}_1(v)\mathfrak{S}_2(v)\mathfrak{S}_3(v)\mathfrak{S}_4(v)}{\mathfrak{S}_2(0)\,\mathfrak{S}_3(0)\,\mathfrak{S}_4(0)}.$$

On a de même

$$\text{(L)}\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}_2(2v) &= \frac{\mathfrak{S}_2^2(v)\mathfrak{S}_3^2(v) - \mathfrak{S}_1^2(v)\mathfrak{S}_4^2(v)}{\mathfrak{S}_2(0)\,\mathfrak{S}_3^2(0)},\\ \mathfrak{S}_3(2v) &= \frac{\mathfrak{S}_2^2(v)\mathfrak{S}_3^2(v) + \mathfrak{S}_1^2(v)\mathfrak{S}_4^2(v)}{\mathfrak{S}_2^2(0)\,\mathfrak{S}_3(0)},\\ \mathfrak{S}_4(2v) &= \frac{\mathfrak{S}_3^4(v) - \mathfrak{S}_2^4(v)}{\mathfrak{S}_4^3(0)} = \frac{\mathfrak{S}_4^4(v) - \mathfrak{S}_1^4(v)}{\mathfrak{S}_4^3(0)}. \end{aligned}\right.$$

VIII. — Transformation d'ordre impair des fonctions $\mathfrak{S}$

254 Dans l'étude de la transformation des fonctions $\mathfrak{S}$, nous n'avons envisagé jusqu'ici que les cas où l'ordre de la transformation est égal à 1, à 2 ou à une puissance entière de 2. Nous allons étudier maintenant les transformations dont l'ordre est impair et positif, transformations qui se ramènent (n° 130) à celles où l'on change ω_1 en $\frac{\omega_1}{n}$ sans changer ω_3, ce qui revient à changer v en nv et τ en $n\tau$, à celles où l'on change ω_3 en $\frac{\omega_3}{n}$ sans changer ω_1, ce qui revient à changer seulement τ en $\frac{\tau}{n}$, et aux transformations inverses.

En combinant les formules de transformation que nous obtien-

drons ainsi [1] entre elles et avec les formules de transformation linéaire et quadratique des fonctions $\mathfrak{S}$, on peut obtenir en effet, d'après le théorème démontré au n° 131, les formules de transformation d'un ordre quelconque positif $\mathfrak{O}$. Il n'y a d'ailleurs pas lieu de considérer celles dont l'ordre est négatif, car nous avons supposé essentiellement (n° 151) que les coefficients des parties imaginaires des rapports $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ et $\frac{\Omega_3}{\Omega_1}$ des périodes à l'aide desquelles on forme les fonctions $\mathfrak{S}(\nu)$ sont positifs.

255 Nous allons donc chercher à exprimer, d'une part, les fonctions $\mathfrak{S}(n\nu\,|\,n\tau)$, d'autre part, les fonctions $\mathfrak{S}\left(\nu\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(\nu\,|\,\tau)$

Nous désignerons, comme nous l'avons déjà fait à propos des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$, par de petites capitales les constantes relatives aux fonctions $\sigma\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_3\right)$, $\sigma_\alpha\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_3\right)$ et $\mathfrak{S}(n\nu\,|\,n\tau)$ Ainsi, nous poserons dans ce paragraphe

$$(\mathrm{LI}_1)\quad \begin{cases} \mathrm{Q} = q^n = e^{n\tau\pi i}, \\ \mathrm{Q}_0 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 - q^{2n\nu}), \qquad \mathrm{Q}_1 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 + q^{2n\nu}), \\ \mathrm{Q}_2 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 + q^{n(2\nu-1)}), \qquad \mathrm{Q}_3 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 - q^{n(2\nu-1)}) \end{cases}$$

Les quantités Q, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 sont d'ailleurs liées par les mêmes relations algébriques que les quantités q, q_0, q_1, q_2, q_3.

Nous poserons aussi, pour abréger,

$$\frac{\mathfrak{S}_1'(0)}{2\omega_1} = \frac{1}{a_1} = \frac{\pi}{\omega_1} q_0^3 q^{\frac{1}{4}}, \qquad \frac{n\,\mathfrak{S}_1'(0\,|\,n\tau)}{2\omega_1} = \frac{1}{\mathrm{A}_1} = \frac{n\pi}{\omega_1}\mathrm{Q}_0^3\mathrm{Q}^{\frac{1}{4}},$$

$$\mathfrak{S}_2(0) = \frac{1}{a_2} = 2q_1^2 q_0 q^{\frac{1}{4}}, \qquad \mathfrak{S}_2(0\,|\,n\tau) = \frac{1}{\mathrm{A}_2} = 2\mathrm{Q}_1^2\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}^{\frac{1}{4}},$$

$$\mathfrak{S}_3(0) = \frac{1}{a_3} = q_2^2 q_0, \qquad \mathfrak{S}_3(0\,|\,n\tau) = \frac{1}{\mathrm{A}_3} = \mathrm{Q}_2^2\mathrm{Q}_0,$$

$$\mathfrak{S}_4(0) = \frac{1}{a_4} = q_3^2 q_0, \qquad \mathfrak{S}_4(0\,|\,n\tau) = \frac{1}{\mathrm{A}_4} = \mathrm{Q}_3^2\mathrm{Q}_0,$$

---

[1] Il suffirait même de ne considérer que le cas où l'ordre de la transformation est un nombre premier impair, mais cette restriction n'apporterait aucune simplification aux formules que nous allons établir

ce qui permet d'écrire comme il suit les formules (XXXIII_{1-4}), qui relient les fonctions σ aux fonctions $\mathfrak{S}$, et celles que l'on en déduit en changeant ω_1 en $\frac{\omega_1}{n}$ ·

$$\sigma u = a_1 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \mathfrak{S}_1(v), \qquad \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = A_1 e^{\frac{n \text{H}_1 u^2}{2\omega_1}} \mathfrak{S}_1(nv \mid n\tau),$$

$$\sigma_\alpha u = a_{\alpha+1} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \mathfrak{S}_{\alpha+1}(v), \qquad \sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = A_{\alpha+1} e^{\frac{n \text{H}_1 u^2}{2\omega_1}} \mathfrak{S}_{\alpha+1}(nv \mid n\tau)$$

En substituant ces dernières formules dans celles (XXVI_1) qui expriment les fonctions $\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$, $\sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$, au moyen des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$, nous aurons immédiatement

$$A_1 \mathfrak{S}_1(nv \mid n\tau) = e^{\varphi} a_1 \mathfrak{S}_1(v) \prod_{(r)} \frac{\mathfrak{S}_1\left(v + \frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{S}_1\left(\frac{r}{n}\right)},$$

$$A_{\alpha+1} \mathfrak{S}_{\alpha+1}(nv \mid n\tau) = e^{\varphi} a_{\alpha+1} \mathfrak{S}_{\alpha+1}(v) \prod_{(r)} \frac{\mathfrak{S}_{\alpha+1}\left(v + \frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}\left(\frac{r}{n}\right)},$$

où r doit prendre $n - 1$ valeurs entières dont aucune ne soit divisible par n, non plus que la différence de deux quelconques d'entre elles, et où φ représente l'expression

$$-n \frac{\text{H}_1 u^2}{2\omega_1} - u \sum_{(r)} \frac{2r}{n} \eta_1 + u^2 \text{P}_1 + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \sum_{(r)} 2\eta_1 \omega_1 \left[\left(\frac{u}{2\omega_1} + \frac{r}{n}\right)^2 - \frac{r^2}{n^2}\right].$$

En se reportant à la valeur de H_1 (XXI_5), on voit de suite que cette expression est nulle On a donc finalement

$$\mathfrak{S}_1(nv \mid n\tau) = \frac{a_1}{A_1} \mathfrak{S}_1(v) \prod_{(r)} \frac{\mathfrak{S}_1\left(v + \frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{S}_1\left(\frac{r}{n}\right)}.$$

$$\mathfrak{S}_{\alpha+1}(nv \mid n\tau) = \frac{a_{\alpha+1}}{A_{\alpha+1}} \mathfrak{S}_{\alpha+1}(v) \prod_{(r)} \frac{\mathfrak{S}_{\alpha+1}\left(v + \frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}\left(\frac{r}{n}\right)}.$$

Les constantes $\frac{a_{\alpha+1}}{A_{\alpha+1}}$ sont des fonctions de q Il en est de même des produits

$$\prod_{(r)} \vartheta_1\left(\frac{r}{n}\right) = \prod_{(r)} \rho_1\left(e^{\frac{r\pi i}{n}}\right),$$

$$\prod_{(r)} \vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{r}{n}\right) = \prod_{(r)} \rho_{\alpha+1}\left(e^{\frac{r\pi i}{n}}\right)$$

qui figurent en dénominateur. On peut évaluer chacun de ces quatre produits en supposant que r parcoure seulement la moitié des valeurs qu'il doit prendre, c'est-à-dire, d'une façon précise, en supposant qu'il prenne $\frac{n-1}{2}$ valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$ dont aucune ne soit divisible par n, non plus que la différence ou la somme de deux quelconques d'entre elles, les $\frac{n-1}{2}$ valeurs restantes seront congrues, dans un certain ordre, suivant le module n, à celles-là changées de signe, et le produit correspondant sera égal, au signe près, au produit que nous allons calculer, comme on le voit tout de suite en se reportant aux formules (XXXIV_{2-3}).

256. Pour évaluer les produits

$$\prod_{(r)} \rho_1\left(e^{\frac{r\pi i}{n}}\right), \qquad \prod_{(r)} \rho_{\alpha+1}\left(e^{\frac{r\pi i}{n}}\right),$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

reportons-nous aux formules ($\text{XXXII}_{5-8\,bis}$), et remplaçons-y $z = e^{v\pi i}$ par

$$z_r = e^{\frac{r\pi i}{n}},$$

on aura immédiatement

$$\prod_{(r)} \rho_1(z_r) = 2^{\frac{n-1}{2}} q_0^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n-1}{8}} \prod_{(r)} \frac{z_r - z_r^{-1}}{2i}$$
$$\times \prod_{(r)} \left[\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1 - q^{2\nu} z_r^2)(1 - q^{2\nu} z_r^{-2}) \right],$$

puis

$$\prod_{(r)}\left[\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1-q^{2\nu}z_r^2)(1-q^{2\nu}z_r^{-2})\right]$$
$$=\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\prod_{(r)}(1-q^{2\nu}z_r^2)(1-q^{2\nu}z_r^{-2})\right],$$

d'ailleurs, si l'on pose

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

on aura

$$z_r^2 = \varepsilon^r, \qquad z_r^{-2} = \varepsilon^{-r},$$

et le produit

$$\prod_{(r)}(1-q^{2\nu}\varepsilon^r)(1-q^{2\nu}\varepsilon^{-r})$$

est égal à

$$\frac{1-q^{2n\nu}}{1-q^{2\nu}},$$

comme on le voit en se rappelant que les nombres

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{\frac{n-1}{2}},\ -r_1,\ -r_2,\ \ldots,\ -r_{\frac{n-1}{2}}$$

n'étant point divisibles par n, non plus que la différence de deux quelconques d'entre eux, sont congrus (mod. n), dans un certain ordre, aux nombres $1, 2, \ldots, n-1$, et que l'on a, ε étant une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité,

$$(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon^2 x)\ldots(1-\varepsilon^{n-1}x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

On peut donc écrire

$$\prod_{(r)}\rho_1(z_r) = 2^{\frac{n-1}{2}}\, q_0^{\frac{n-1}{2}}\, q^{\frac{n-1}{8}}\, \frac{Q_0}{q_0} \prod_{(r)} \frac{z_r - z_r^{-1}}{2i}$$

et, de même,

$$\prod_{(r)}\rho_2(z_r) = 2^{\frac{n-1}{2}}\, q_0^{\frac{n-1}{2}}\, q^{\frac{n-1}{8}}\, \frac{Q_1}{q_1} \prod_{(r)} \frac{z_r + z_r^{-1}}{2},$$

$$\prod_{(r)}\rho_3(z_r) = q_0^{\frac{n-1}{2}}\, \frac{Q_2}{q_2},$$

$$\prod_{(r)}\rho_4(z_r) = q_0^{\frac{n-1}{2}}\, \frac{Q_3}{q_3}$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Quant aux produits

$$\prod_{(r)} \frac{z_r - z_r^{-1}}{2i} = \prod_{(r)} \sin\frac{r\pi}{n},$$

$$\prod_{(r)} \frac{z_r + z_r^{-1}}{2} = \prod_{(r)} \cos\frac{r\pi}{n}$$

$$\left(r = r_1, r_2, \quad , r_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

ils s'évaluent sans peine comme il suit. D'abord le signe du premier dépend du nombre de facteurs négatifs qui y figurent . or $\sin\frac{r\pi}{n}$ est positif ou négatif, suivant que la partie entière $E\left(\frac{r}{n}\right)$ de $\frac{r}{n}$, définie par les conditions précises

$$0 < \frac{r}{n} - E\left(\frac{r}{n}\right) < 1,$$

est un nombre pair ou impair; le signe du premier produit sera donc celui de

$$(-1)^{\sum\limits_{(r)} E\left(\frac{r}{n}\right)}$$

De même, puisque l'on a

$$\cos\frac{r\pi}{n} = \sin\frac{n+2r}{2n}\pi,$$

le signe du second produit sera celui de

$$(-1)^{\sum\limits_{(r)} E\left(\frac{n+2r}{2n}\right)}$$

D'ailleurs les nombres

$$r_1, \quad r_2, \quad \quad , \quad r_{\frac{n-1}{2}}, \quad -r_1, \quad -r_2, \quad ., \quad -r_{\frac{n-1}{2}}$$

étant certainement congrus, dans un certain ordre, suivant le module n, aux nombres

$$1, \quad 2, \quad \quad , \quad \frac{n-1}{2}, \quad -1, \quad -2, \quad \quad , \quad -\frac{n-1}{2},$$

les nombres

$$r_1, \quad r_2, \quad . \quad , \quad r_{\frac{n-1}{2}}$$

sont certainement congrus, dans un certain ordre, aux nombres

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \ldots, \quad \pm \frac{n-1}{2},$$

en sorte que l'on a [1]

$$\pm \prod_{(r)} \sin \frac{r\pi}{n} = \prod_{\nu=1}^{\nu=\frac{n-1}{2}} \sin \frac{\nu\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$\pm \prod_{(r)} \cos \frac{r\pi}{n} = \prod_{\nu=1}^{\nu=\frac{n-1}{2}} \cos \frac{\nu\pi}{n} = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}.$$

---

[1] Voici l'un des procédés qui conduisent à ces résultats. L'équation

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = 0$$

a pour racines les $2n-2$ valeurs de

$$x_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1, -1, -2, \ldots, -n+1).$$

On a d'ailleurs

$$\sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2i} \frac{x_k^2 - 1}{x_k},$$

et, en remarquant que $\prod_{(k)} x_k$ est égal à 1, on en conclut

$$(-1)^{n-1} \prod_{\nu=1}^{\nu=n-1} \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} = \prod_{(k)} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2^{2n-2} i^{2n-2}} \prod_{\nu=1}^{\nu=n-1} (x_\nu^2 - 1)^2.$$

Or si, dans l'équation proposée, on fait

$$x^2 = 1 + u,$$

on forme l'équation en u

$$(1+u)^{n-1} + (1+u)^{n-2} + \ldots + 1 = 0,$$

dont les racines, qui ne sont autres que les valeurs distinctes de $x_k^2 - 1$, ont pour produit $(-1)^{n-1} n$. On en conclut

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=n-1} \sin \frac{\nu\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

On en conclut d'abord

$$
(\mathrm{LI}_2)\quad
\begin{cases}
\prod_{(r)} \vartheta_1\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{\sum_{(r)} \mathrm{E}\left(\frac{r}{n}\right)} q_0^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n-1}{8}} \frac{Q_0}{q_0}\sqrt{n}, \\
\prod_{(r)} \vartheta_2\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{\sum_{(r)} \mathrm{E}\left(\frac{n+2r}{2n}\right)} q_0^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n-1}{8}} \frac{Q_1}{q_1}, \\
\prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r}{n}\right) = q_0^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q_2}{q_2}, \\
\prod_{(r)} \vartheta_4\left(\frac{r}{n}\right) = q_0^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q_3}{q_3}, \\
\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)
\end{cases}
$$
[1]

---

puisque les deux membres sont évidemment positifs On en déduit

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\frac{n-1}{2}} \sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{\frac{n-1}{2}}}.$$

On trouve de même

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\frac{n-1}{2}} \cos\frac{\nu\pi}{n} = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$$

[1] La première de ces formules donne un résultat assez intéressant en supposant $n=3$, $r=1$, à savoir

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{3}\, q^{\frac{1}{4}} Q_0,$$

ou

$$Q_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n q^{p(n+1)} \sin\frac{(2n+1)\pi}{3},$$

et, en réunissant les termes où n est de l'une des formes $3p$, $3p+1$, $3p+2$,

$$Q_0 = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p q^{3p(3p+1)} - \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p q^{(3p+2)(3p+3)},$$

enfin, en remplaçant q par $x^{\frac{1}{6}}$,

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1-x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left[x^{\frac{n(3n-1)}{2}} + x^{\frac{n(3n+1)}{2}}\right]$$
$$= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$$

Cette identité est due à Euler

257. Les mêmes formules s'appliqueraient aussi aux $\frac{n-1}{2}$ nombres $r_{\frac{n+1}{2}}, r_{\frac{n+3}{2}}, \ldots, r_{n-1}$, qu'il faut adjoindre aux nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$ pour former la suite complète $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$. En supposant la première égalité LI_2 écrite pour ces valeurs de r et en multipliant membre à membre avec cette même égalité, on trouve

$$\prod_{(r)} \vartheta_1\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{\sum_{(r)} \mathrm{E}\left(\frac{r}{n}\right)} q_0^{n-1} q^{\frac{n-1}{4}} \frac{Q_0^2}{q_0^2} n$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

On a aussi, pour les mêmes valeurs de r,

$$\prod_{(r)} \vartheta_2\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{\sum_{(r)} \mathrm{E}\left(\frac{n+2r}{2n}\right)} q_0^{n-1} q^{\frac{n-1}{4}} \frac{Q_1^2}{q_1^2}.$$

D'ailleurs, on voit tout de suite que les différences

$$\sum_{(r)} \mathrm{E}\left(\frac{r}{n}\right) - \sum_{(r)} \frac{r}{n}, \quad \sum_{(r)} \mathrm{E}\left(\frac{n+2r}{2n}\right) - \sum_{(r)} \frac{r}{n}$$

ne changent pas quand on remplace les nombres r par d'autres qui leur soient respectivement congrus suivant le module n, puisque les différences

$$\mathrm{E}\left(\frac{r}{n}\right) - \frac{r}{n}, \quad \mathrm{E}\left(\frac{n+2r}{2n}\right) - \frac{r}{n}$$

ne changent pas quand on augmente r de n. D'autre part, si l'on prend pour les nombres r les nombres

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{2}, \quad -1, \quad -2, \quad \ldots, \quad -\frac{n-1}{2},$$

les deux différences que l'on s'est proposé d'évaluer sont respectivement égales à

$$-\frac{n-1}{2}, \quad 0,$$

les quantités $\mathrm{E}\left(\frac{r}{n}\right)$, $\mathrm{E}\left(\frac{n+2r}{2n}\right)$ sont, en effet, nulles pour toutes

ces valeurs de r, sauf la première, qui, pour les valeurs négatives de r, est égale à -1. On a donc finalement, en remarquant que les nombres $\sum\limits_{(r)} r$, $\sum\limits_{(r)} \frac{r}{n}$ sont en même temps pairs ou impairs,

$$(\mathrm{LI}_3)\quad \left\{\begin{aligned} &\prod_{(r)} \vartheta_1\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{-\frac{n-1}{2}+\sum\limits_{(r)} r} q_0^{n-1} q^{\frac{n-1}{4}} \frac{Q_0^2}{q_0^2} n,\\ &\prod_{(r)} \vartheta_2\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{\sum\limits_{(r)} r} q_0^{n-1} q^{\frac{n-1}{4}} \frac{Q_1^2}{q_1^2},\\ &\prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r}{n}\right) = q_0^{n-1} \frac{Q_2^2}{q_2^2},\\ &\prod_{(r)} \vartheta_4\left(\frac{r}{n}\right) = q_0^{n-1} \frac{Q_3^2}{q_3^2},\\ &\qquad (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}), \end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, en se reportant aux valeurs des quantités a_1, A_1, $a_{\alpha+1}$, $A_{\alpha+1}$,

$$(\mathrm{LI}_4)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta_1(nv \mid n\tau) = (-1)^{\frac{n-1}{2}-\sum\limits_{(r)} r} \frac{Q_0}{q_0^n} \vartheta_1(v) \prod_{(r)} \vartheta_1\left(v+\frac{r}{n}\right),\\ &\vartheta_2(nv \mid n\tau) = (-1)^{\sum\limits_{(r)} r} \frac{Q_0}{q_0^n} \vartheta_2(v) \prod_{(r)} \vartheta_2\left(v+\frac{r}{n}\right),\\ &\vartheta_3(nv \mid n\tau) = \frac{Q_0}{q_0^n} \vartheta_3(v) \prod_{(r)} \vartheta_3\left(v+\frac{r}{n}\right),\\ &\vartheta_4(nv \mid n\tau) = \frac{Q_0}{q_0^n} \vartheta_4(v) \prod_{(r)} \vartheta_4\left(v+\frac{r}{n}\right),\\ &\qquad (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}). \end{aligned}\right.$$

On pourra prendre, en particulier, pour les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, une suite telle que

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{\frac{n-1}{2}},\ -r_1,\ -r_2,\ \ldots,\ -r_{\frac{n-1}{2}},$$

aucun des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$ n'étant divisible par n, non plus que la différence ou la somme de deux quelconques d'entre eux.

Il convient d'observer que les quatre formules que l'on vient

d'établir peuvent être déduites de l'une quelconque d'entre elles, en y remplaçant v par $v+\frac{1}{2}$, $v+\frac{\tau}{2}$, $v+\frac{1+\tau}{2}$.

258 Nous avons déduit les expressions des quatre fonctions $\mathfrak{S}_1(nv\,|\,n\tau)$, $\mathfrak{S}_\alpha(nv\,|\,n\tau)$ des expressions de $\sigma\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$, $\sigma_\alpha\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$. Il n'est pas inutile d'observer que ces expressions peuvent s'obtenir tout aussi facilement, et même d'une façon plus rapide, en partant des formules qui donnent les fonctions $\mathfrak{S}$ décomposées en facteurs. Au fond, l'analyse que nous allons indiquer d'après Jacobi [1] ne diffère pas de celle qui précède.

Partons, par exemple, de la formule (XXXII$_7$)

$$\mathfrak{S}_3(v) = q_0 \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} [1 + 2q^{2\nu-1}\cos 2\nu\pi + q^{2(2\nu-1)}].$$

On en déduit

$$\mathfrak{S}_3(nv\,|\,n\tau) = Q_0 \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} [1 + 2q^{n(2\nu-1)}\cos 2nv\pi + q^{2n(2\nu-1)}]$$

D'un autre côté, si l'on décompose en facteurs du second degré en q le polynome de degré $2n$,

$$1 + 2q^n\cos 2nv\pi + q^{2n},$$

dont on a immédiatement les racines, on trouve [2]

$$1 + 2q^n\cos 2nv\pi + q^{2n} = \prod_{(r)} \left[1 + 2q\cos 2\pi\left(v + \frac{r}{n}\right) + q^2\right]$$
$$(r = 0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

En changeant dans cette identité q en $q^{2\nu-1}$ et en l'appliquant à chacun des facteurs qui figurent dans le produit infini on trouve immédiatement

$$\mathfrak{S}_3(nv\,|\,n\tau) = Q_0 \prod_{(r)} \left\{ \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[1 + 2q^{2\nu-1}\cos 2\pi\left(v + \frac{r}{n}\right) + q^{2(2\nu-1)}\right] \right\}$$
$$(r = 0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

---

[1] WEBER, t. I, p. 258

[2] C'est l'identité connue sous le nom de *théorème de Cotes*

et l'on en conclut

$$\vartheta_3(nv\,|\,n\tau) = \frac{Q_0}{q_0^n}\vartheta_3(v)\prod_{(r)}\vartheta_3\left(v+\frac{r}{n}\right)$$
$$(r = r_1, r_2, \quad , r_{n-1}).$$

Le lecteur a d'ailleurs, dans ce qui précède, tout ce qui est nécessaire pour appliquer la même analyse aux trois autres fonctions ϑ; on peut aussi déduire ces trois autres formules de celle que l'on vient d'établir

259. Prenons maintenant les formules qui donnent

$$\sigma\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\ \omega_3\right),\qquad \sigma_\alpha\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\ \omega_3\right),$$

au moyen de σu, $\sigma_\alpha u$ sous la forme (XXVI_{1-5}). On trouvera de la même façon

$$(\text{LI}_6)\quad \vartheta_1(nv\,|\,n\tau) = \frac{a_1 a_{\alpha+1}^{n-1}}{A_1}\vartheta_1(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_{\alpha+1}^2(v) - \frac{\vartheta_{\alpha+1}^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}\vartheta_1^2(v)\right]$$
$$\left(r = r_1, r_2, \quad , r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Dans cette formule, α peut prendre l'une quelconque des valeurs 1, 2, 3. On peut l'écrire de diverses façons; on peut y remplacer, par exemple, $\dfrac{a_1 a_{\alpha+1}}{A_1}$ par

$$\frac{n\,\vartheta_1'(0\,|\,n\tau)}{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_{\alpha+1}^{n-1}(0)},$$

on peut aussi, en élevant au carré la valeur (LI_2) trouvée pour

$$\prod_{(r)}\vartheta_1\left(\frac{r}{n}\right)\qquad\left(r = r_1, r_2, \quad , r_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

écrire

$$\vartheta_1(nv\,|\,n\tau) = \frac{Q_0}{q_0^n}a_{\alpha+1}^{n-1}\vartheta_1(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_{\alpha+1}^2(v)\vartheta_1^2\left(\frac{r}{n}\right) - \vartheta_1^2(v)\vartheta_{\alpha+1}^2\left(\frac{r}{n}\right)\right].$$

260. On obtient des expressions analogues pour les fonctions $\vartheta_{\alpha+1}(nv\,|\,n\tau)$, $(\alpha = 1, 2, 3)$, soit en partant des formules (XXVI_5) e en passant des σ aux ϑ par les formules (XXXIII_1), soit en

remplaçant dans les formules (LI_5), que l'on vient d'obtenir, écrites explicitement pour $\alpha = 1, 2, 3$, successivement v par $v + \frac{1}{2}$, $v + \frac{\tau}{2}$, $v + \frac{1+\tau}{2}$; nous nous contenterons de transcrire les résultats .

$$(LI_6)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_2(nv \mid n\tau) = \dfrac{a_2^n}{A_2}\mathfrak{Z}_2(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{Z}_2^2(v) - \dfrac{\mathfrak{Z}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{Z}_2^2\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{Z}_1^2(v)\right] \\ \qquad = \dfrac{a_3^n}{A_3}\mathfrak{Z}_2(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{Z}_2^2(v) - \dfrac{\mathfrak{Z}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{Z}_3^2\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{Z}_4^2(v)\right] \\ \qquad = \dfrac{a_4^n}{A_4}\mathfrak{Z}_2(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{Z}_2^2(v) - \dfrac{\mathfrak{Z}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{Z}_4^2\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{Z}_3^2(v)\right], \end{cases}$$

$$(LI_7)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_3(nv \mid n\tau) = \dfrac{a_3^n}{A_3}\mathfrak{Z}_3(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{Z}_3^2(v) + \dfrac{\mathfrak{Z}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{Z}_3^2\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{Z}_1^2(v)\right] \\ \qquad = \dfrac{a_2^n}{A_2}\mathfrak{Z}_3(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{Z}_3^2(v) + \dfrac{\mathfrak{Z}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{Z}_2^2\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{Z}_4^2(v)\right] \\ \qquad = \dfrac{a_4^n}{A_4}\mathfrak{Z}_3(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{Z}_3^2(v) - \dfrac{\mathfrak{Z}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{Z}_4^2\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{Z}_2^2(v)\right], \end{cases}$$

$$(LI_8)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_4(nv \mid n\tau) = \dfrac{a_4^n}{A_4}\mathfrak{Z}_4(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{Z}_4^2(v) - \dfrac{\mathfrak{Z}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{Z}_4^2\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{Z}_1^2(v)\right] \\ \qquad = \dfrac{a_2^n}{A_2}\mathfrak{Z}_4(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{Z}_4^2(v) + \dfrac{\mathfrak{Z}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{Z}_2^2\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{Z}_3^2(v)\right] \\ \qquad = \dfrac{a_3^n}{A_3}\mathfrak{Z}_4(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{Z}_4^2(v) + \dfrac{\mathfrak{Z}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{Z}_3^2\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{Z}_2^2(v)\right] \end{cases}$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

261. On vérifie sans peine que, en changeant à nouveau, dans l'une quelconque de ces formules, v en $v+\frac{1}{2}$, $v+\frac{\tau}{2}$, $v+\frac{1+\tau}{2}$, on retombe toujours sur les mêmes résultats, au moins si l'on tient compte des égalités suivantes, bien aisées à établir,

$$(\mathrm{LI}_9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{q_0^n}{Q_0} &= \frac{A_1}{a_1}\prod_{(r)}\mathfrak{I}_1^2\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{A_{\alpha+1}}{a_{\alpha+1}}\prod_{(r)}\mathfrak{I}_{\alpha+1}^2\left(\frac{r}{n}\right) \\ &= \frac{\mathfrak{I}'_1(0)\prod_{(r)}\mathfrak{I}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{n\,\mathfrak{I}'_1(0\,|\,n\tau)} = \frac{\mathfrak{I}_{\alpha+1}(0)\prod_{(r)}\mathfrak{I}_{\alpha+1}^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{I}_{\alpha+1}(0\,|\,n\tau)} \\ &= (-1)^{\sum_{(r)}E\left(\frac{r}{n}\right)}\frac{\sqrt{n}\,[\mathfrak{I}'_1(0)]^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{(r)}\mathfrak{I}_1\left(\frac{r}{n}\right)} \\ &\left(\alpha = 1, 2, 3,\ r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right). \end{aligned}\right.$$

262. Le cas où l'on divise la seconde période par un nombre impair n, et la recherche des expressions des fonctions $\mathfrak{I}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$, au moyen des fonctions $\mathfrak{I}(v)$, se traitera de la même manière.

Partons, par exemple, des formules (XXVII_{1-3}), et, tout en conservant les notations précédentes pour ce qui concerne les fonctions $\sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_3)$, $\sigma_\alpha(u\,|\,\omega_1, \omega_3)$ et $\mathfrak{I}(v\,|\,\tau)$, désignons par de petites initiales affectées d'un accent les constantes relatives aux fonctions $\sigma\left(u\,\middle|\,\omega_1, \frac{\omega_3}{n}\right)$, $\sigma_\alpha\left(u\,\middle|\,\omega_1, \frac{\omega_3}{n}\right)$ et $\mathfrak{I}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$, en d'autres termes, posons

$$(\mathrm{LII}_1)\quad \left\{\begin{aligned} &Q' = q^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\tau\pi i}{n}}, \\ &Q'_0 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1-q^{\frac{2\nu}{n}}\right), \qquad Q'_1 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1+q^{\frac{2\nu}{n}}\right), \\ &Q'_2 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1+q^{\frac{2\nu-1}{n}}\right), \qquad Q'_3 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1-q^{\frac{2\nu-1}{n}}\right) \end{aligned}\right.$$

Soient aussi, pour abréger,

$$\frac{1}{2\omega_1}\mathfrak{I}'_1\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = \frac{1}{A'_1} = \frac{\pi}{\omega_1}Q_0'^3 Q'^{\frac{1}{4}},$$

$$\mathfrak{I}_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = \frac{1}{A'_2} = 2Q_1'^2 Q'_0 Q'^{\frac{1}{4}},$$

$$\mathfrak{I}_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = \frac{1}{A'_3} = Q_2'^2 Q'_0,$$

$$\mathfrak{I}_4\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = \frac{1}{A'_4} = Q_3'^2 Q'_0.$$

Nous aurons alors, en passant des fonctions σ, σ_α aux fonctions $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_{\alpha+1}$,

$$A'_1\,\mathfrak{I}_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = e^{\psi}a_1\,\mathfrak{I}_1(v)\prod_{(r)}\frac{\mathfrak{I}_1\left(v+\frac{r\tau}{n}\right)}{\mathfrak{I}_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)},$$

$$A'_{\alpha+1}\,\mathfrak{I}_{\alpha+1}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = e^{\psi}a_{\alpha+1}\,\mathfrak{I}_{\alpha+1}(v)\prod_{(r)}\frac{\mathfrak{I}_{\alpha+1}\left(v+\frac{r\tau}{n}\right)}{\mathfrak{I}_{\alpha+1}\left(\frac{r\tau}{n}\right)}$$

$$(r = r_1, r_2, \quad, r_{n-1}),$$

où ψ représente l'expression

$$\psi = -\frac{H'_1}{2\omega_1}u^2 - u\sum_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_3 + u^2 P_3$$
$$+\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \sum_{(r)} 2\eta_1\omega_1\left[\left(\frac{u}{2\omega_1}+\frac{r\tau}{n}\right)^2 - \frac{r^2\tau^2}{n^2}\right],$$

qui se réduit immédiatement, et est égale à

$$\psi = 2v\pi i\sum_{(r)}\frac{r}{n}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(\text{LII}_5)\qquad \begin{cases} b_1 = \dfrac{a_1}{A'_1}\,\dfrac{1}{\prod\limits_{(r)}\mathfrak{I}_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)}, \\[2ex] b_{\alpha+1} = \dfrac{a_{\alpha+1}}{A'_{\alpha+1}}\,\dfrac{1}{\prod\limits_{(r)}\mathfrak{I}_{\alpha+1}\left(\frac{r\tau}{n}\right)}, \end{cases}$$

les formules précédentes prennent la forme

$$(\mathrm{LII}_4)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(v\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right)=b_1 e^{2v\pi i\sum\limits_{(r)}\frac{r}{n}}\vartheta_1(v)\prod\limits_{(r)}\vartheta_1\left(v+\dfrac{r\tau}{n}\right), \\ \vartheta_{\alpha+1}\left(v\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right)=b_{\alpha+1} e^{2v\pi i\sum\limits_{(r)}\frac{r}{n}}\vartheta_{\alpha+1}(v)\prod\limits_{(r)}\vartheta_{\alpha+1}\left(v+\dfrac{r\tau}{n}\right) \\ \qquad (r=r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}), \end{cases}$$

de sorte que le problème de la transformation de τ en $\frac{\tau}{n}$ est ramené au suivant

Exprimer, au moyen de q, les quantités b_1, $b_{\alpha+1}$ définies par les formules (LII_5).

263. Il est aisé de voir comment, au moyen des formules (XXXIV), on passe de l'une des relations (LII_4) aux trois autres en ajoutant successivement à l'argument v les quantités $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$. On trouve ainsi, par un calcul très facile, en comparant les résultats, et en se rappelant que $\sum\limits_{(r)}\frac{r}{n}$ est toujours un entier de même parité que $\sum\limits_{(r)} r$,

$$(\mathrm{LII}_5)_{bis}\qquad b_1=b_4,\qquad b_2=b_3=(-1)^{\sum\limits_{(r)} r}\, b_1$$

Il nous suffira donc d'exprimer, au moyen de q, l'une des quantités b_1, b_2, b_3, b_4

264. Nous commencerons par exprimer, au moyen de q, les différents produits

$$\prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}}\vartheta_1\left(\frac{r\tau}{n}\right),\qquad \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}}\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{r\tau}{n}\right).$$

Si l'on se reporte à la formule ($\mathrm{XXXII}_{7\,bis}$)

$$\text{o}_{\mathbf{1}}\; z) = q_0 f(z),$$

où

$$f(z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1 + q^{2\nu-1} z^2)(1 + q^{2\nu-1} z^{-2}),$$

et si l'on fait

$$z_r = e^{\frac{r\tau\pi i}{n}} = q^{\frac{r}{n}},$$

on aura manifestement

$$\prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \rho_3(z_r) = q_0^{\frac{n-1}{2}} f(z_1) f(z_2) \quad f\left(z_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

en sorte qu'il suffira de calculer le produit

$$f(z_1) f(z_2) \quad . f\left(z_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

qui peut s'écrire

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left\{ \prod_{(r)} \left[1 + q^{2\nu-1+\frac{2r}{n}}\right] \left[1 + q^{2\nu-1-\frac{2r}{n}}\right] \right\}$$
$$\left(r = 1, 2, \quad , \frac{n-1}{2}\right).$$

Or on a, comme on le reconnaît de suite, en écrivant les facteurs de la quantité entre crochets, de manière que les exposants de q aillent en croissant,

$$\prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \left[1 + q^{\frac{(2\nu-1)n+2r}{n}}\right] \left[1 + q^{\frac{(2\nu-1)n-2r}{n}}\right]$$
$$= \frac{1}{1 + q^{2\nu-1}} \prod_{\mu=1}^{\mu=n} \left[1 + q^{\frac{2(\nu-1)n+2\mu-1}{n}}\right],$$

et, par conséquent, le produit cherché est égal à une fraction dont le dénominateur est égal à

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1 + q^{2\nu-1}) = q_2,$$

tandis que le numérateur est égal à

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\prod_{\mu=1}^{\mu=n}\left[1+q^{\frac{2(\nu-1)n+2\mu-1}{n}}\right]=\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[1+q^{\frac{2\nu-1}{n}}\right]=Q'_2$$

(l'égalité résulte de ce que, dans le premier membre, les exposants de q sont *tous* les nombres impairs divisés par n). On a donc

$$\prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} f(z_r)=\frac{Q'_2}{q_2}$$

et par suite

$$\text{(LII}_2\text{)}\qquad \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)=q_0^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{Q'_2}{q_2}.$$

Par un calcul tout semblable, on obtient de même les relations

$$\text{(LII}_2\text{)}\qquad \left\{\begin{aligned}
&\prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)=i^{\frac{n-1}{2}}\,q^{-\frac{n-1}{8n}}\,q_0^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{Q'_0}{q_0},\\
&\prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \vartheta_2\left(\frac{r\tau}{n}\right)=q^{-\frac{n-1}{8n}}\,q_0^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{Q'_1}{q_1},\\
&\prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \vartheta_4\left(\frac{r\tau}{n}\right)=q_0^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{Q'_3}{q_3}.
\end{aligned}\right.$$

265. C'est en nous appuyant sur la première de ces relations que nous allons exprimer b_3 en fonction de q Comme on a manifestement

$$z_{n-r}=q^{\frac{n-r}{n}}=\frac{q}{z_r},\qquad f\left(\frac{q}{z}\right)=\frac{z^2}{q}\,f(z),$$

on en conclut

$$f(z_{n-r})=q^{\frac{2r-n}{n}}\,f(z_r),$$

d'où

$$\prod_{r=\frac{n+1}{2}}^{r=n-1} f(z_r)=\prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} f(z_{n-r})=\prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} q^{\frac{2r-n}{n}}\,\frac{Q'_2}{q_2}=q'^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\frac{Q'_2}{q_2},$$

et par suite

$$\prod_{r=1}^{r=n-1} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right) = \prod_{r=1}^{r=n-1} \rho_3(z_r) = q_0^{n-1} \prod_{r=1}^{r=n-1} f(z_r) = \frac{q_0^{n-1} Q_2'^2}{Q'^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} q_2^{\frac{2}{2}}}.$$

Mais il résulte des formules (XXXIV_5) que l'on a

$$\vartheta_3\left(\frac{r+n}{n}\tau\right) = q^{-\frac{2r+n}{n}} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right);$$

donc la fonction

$$q^{\frac{r^2}{n^2}} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)$$

ne change pas quand on remplace r par $r+n$, par suite, le produit

$$\prod_{(r)} q^{\frac{r^2}{n^2}} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right) \qquad (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

ne change pas quand on remplace $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ par un système analogue de nombres entiers. On aura donc

$$\prod_{(r)} q^{\frac{r^2}{n^2}} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right) = \frac{q_0^{n-1} Q_2'^2}{Q'^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} q_2^{\frac{2}{2}}} \prod_{r=1}^{r=n-1} q^{\frac{r^2}{n^2}},$$

et, en se rappelant l'expression de la somme des carrés des $n-1$ premiers nombres entiers, on trouvera, après des réductions immédiates,

$$\prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right) = Q'^{\frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{n}\sum_{(r)} r^2} \frac{q_0^{n-1} Q_2'^2}{q_2^{\frac{2}{2}}}.$$

En se reportant aux valeurs de a_3 et de A_3', on a donc

$$(\text{LII}_5)_{ter} \quad b_3 = \frac{Q_0'}{q_0^n} Q'^{-\frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{n}\sum_{(r)} r^2}, \qquad (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

Cette expression se réduit à $\frac{Q_0'}{q_0^n}$ lorsqu'on prend pour r les nombres

$$\pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \ \pm \frac{n-1}{2}.$$

266 A l'aide des relations (LII_5) (n^os 262, 263, 265), on ob-

tient immédiatement les relations suivantes, qui peuvent être utiles; la troisième a déjà été obtenue au numéro précédent.

$$(\mathrm{LII}_3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\prod_{(r)}\mathfrak{S}_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)=(-1)^{\sum_{(r)} r}\, q_0^{n-3}\,Q_0'^2\,q^{\frac{(n-1)(n-2)}{12n}-\sum_{(r)}\frac{r^2}{n^2}},\\
&\prod_{(r)}\mathfrak{S}_2\left(\frac{r\tau}{n}\right)=\frac{q_0^{n-1}}{q_1^2}\,Q_1'^2\,q^{\frac{(n-1)(n-2)}{12n}-\sum_{(r)}\frac{r^2}{n^2}},\\
&\prod_{(r)}\mathfrak{S}_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)=\frac{q_0^{n-1}}{q_2^2}\,Q_2'^2\,q^{\frac{n^2-1}{12n}-\sum_{(r)}\frac{r^2}{n^2}},\\
&\prod_{(r)}\mathfrak{S}_4\left(\frac{r\tau}{n}\right)=(-1)^{\sum_{(r)} r}\,\frac{q_0^{n-1}}{q_3^2}\,Q_3'^2\,q^{\frac{n^2-1}{12n}-\sum_{(r)}\frac{r^2}{n^2}}\\
&\qquad(r=r_1,r_2,\ldots,r_{n-1})
\end{aligned}\right.$$

On a aussi les relations suivantes

$$(\mathrm{LII}_4)\quad\left\{\begin{aligned}
&(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{A_1'}{a_1}\prod_{(r)}\mathfrak{S}_1^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)=\frac{A_{\alpha+1}'}{a_{\alpha+1}}\prod_{(r)}\mathfrak{S}_{\alpha+1}^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)=\frac{q_0^n}{Q_0'}\,q^{\frac{n^2-1}{12n}-2\sum_{(r)}\frac{r^2}{n^2}}\\
&\qquad\left(r=r_1,r_2,\ldots,r_{\frac{n-1}{2}}\right),
\end{aligned}\right.$$

qui résultent immédiatement du calcul des quantités b_1, $b_{\alpha+1}$, si l'on prend pour r les nombres $\pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_{\frac{n-1}{2}}$.

Comme on a d'ailleurs

$$\frac{A_1'}{a_1}=\frac{\mathfrak{S}_1'(0)}{\mathfrak{S}_1'\left(0\left|\frac{\tau}{n}\right.\right)},\qquad \frac{A_{\alpha+1}'}{a_{\alpha+1}}=\frac{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}\left(0\left|\frac{\tau}{n}\right.\right)},$$

on pourra exprimer $\mathfrak{S}_1'\left(0\left|\frac{\tau}{n}\right.\right)$, $\mathfrak{S}_{\alpha+1}\left(0\left|\frac{\tau}{n}\right.\right)$, au moyen de $\mathfrak{S}_1'(0)$, $\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)$, $\prod_{(r)}\mathfrak{S}_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)$, $\prod_{(r)}\mathfrak{S}_{\alpha+1}\left(\frac{r\tau}{n}\right)$. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire ces formules

267. Les formules (XXVII_4), qui expriment les fonctions $\sigma\left(u\left|\omega_1,\frac{\omega_3}{n}\right.\right)$, $\sigma_\alpha\left(u\left|\omega_1,\frac{\omega_3}{n}\right.\right)$ au moyen des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$,

nous permettent d'exprimer aussi les fonctions $\mathfrak{S}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v)$. En passant des σ aux $\mathfrak{S}$ à l'aide des relations (XXIII_{1-4}), et en remplaçant, à l'aide des relations (XXXIX_5), les produits $(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)$ par les quantités $\mathfrak{S}^4_{\alpha+1}(0)$, on obtient aisément les formules suivantes :

$$
(\mathrm{LII}_7)\quad
\begin{cases}
\mathfrak{S}_1\left(v\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right) = \dfrac{a_1 a_{\alpha+1}^{n-1}}{A'_1}\,\mathfrak{S}_1(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{S}^2_{\alpha+1}(v) - \dfrac{\mathfrak{S}^2_{\alpha+1}\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\mathfrak{S}^2_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)}\mathfrak{S}^2_1(v)\right],\\[2ex]
\mathfrak{S}_2\left(v\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right) = \dfrac{a_2^n}{A'_2}\,\mathfrak{S}_2(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{S}^2_2(v) - \dfrac{\mathfrak{S}^2_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\mathfrak{S}^2_2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}\mathfrak{S}^2_1(v)\right],\\[2ex]
\mathfrak{S}_3\left(v\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right) = \dfrac{a_3^n}{A'_3}\,\mathfrak{S}_3(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{S}^2_3(v) + \dfrac{\mathfrak{S}^2_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\mathfrak{S}^2_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)}\mathfrak{S}^2_1(v)\right],\\[2ex]
\mathfrak{S}_4\left(v\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right) = \dfrac{a_4^n}{A'_4}\,\mathfrak{S}_4(v)\displaystyle\prod_{(r)}\left[\mathfrak{S}^2_4(v) - \dfrac{\mathfrak{S}^2_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\mathfrak{S}^2_4\left(\frac{r\tau}{n}\right)}\mathfrak{S}^2_1(v)\right],\\[2ex]
\qquad\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right).
\end{cases}
$$

268. En changeant, dans ces formules, v en $v+\frac{1}{2}$, $v+\frac{\tau}{2}$, $v+\frac{1+\tau}{2}$, on obtient six expressions pour chacune des fonctions $\mathfrak{S}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v\,|\,\tau)$; elles se réduisent à trois, si l'on tient compte des relations (LII_6).

On remarquera d'ailleurs que les deux problèmes qui consistent à exprimer les fonctions $\mathfrak{S}(nv\,|\,n\tau)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v\,|\,\tau)$, et les fonctions $\mathfrak{S}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v\,|\,\tau)$ ne sont pas réellement distincts, on ramène l'un à l'autre par des transformations linéaires. En effet, pour exprimer les fonctions $\mathfrak{S}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v\,|\,\tau)$, on peut exprimer les fonctions $\mathfrak{S}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}\left(\frac{nv}{\tau}\,\middle|\,-\frac{n}{\tau}\right)$ (c'est une transformation linéaire); puis, exprimer les fonc-

tions $\mathfrak{S}\left(\frac{n v}{\tau} \middle| -\frac{n}{\tau}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)$ (c'est le premier des deux problèmes), puis, enfin, exprimer les fonctions $\mathfrak{S}\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v \mid \tau)$ (c'est encore une transformation linéaire).

269. En se reportant aux définitions des fonctions modulaires

$$\varphi(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{q_1}{q_2}, \qquad \psi(\tau) = \frac{q_3}{q_2}, \qquad \mathrm{h}(\tau) = q_0 q^{\frac{1}{12}}, \qquad \chi(\tau) = \sqrt[6]{2}\, \frac{q^{\frac{1}{24}}}{q_2},$$

et aux expressions des produits

$$\prod_{(r)} \mathfrak{S}\left(\frac{r}{n}\right), \qquad \prod_{(r)} \mathfrak{S}\left(\frac{r\tau}{n}\right), \qquad \left(r = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right),$$

au moyen de q, Q_0, Q_α pour les uns, de q, Q'_0, Q'_α pour les autres, on obtiendra immédiatement les relations suivantes :

$$(\text{LIII}) \left\{ \begin{array}{ll} (1) & [\mathrm{h}(\tau)]^{3\frac{n-1}{2}} = \prod_{(r)} \left[\mathfrak{S}_2\left(\frac{r}{n}\right) \mathfrak{S}_3\left(\frac{r}{n}\right) \mathfrak{S}_4\left(\frac{r}{n}\right)\right], \\ (2) & \sqrt{n}\, \mathrm{h}(n\tau)\, [\mathrm{h}(\tau)]^{\frac{n-3}{2}} = \prod_{(r)} \mathfrak{S}_1\left(\frac{r}{n}\right), \\ (3) & \dfrac{\varphi(n\tau)}{\varphi(\tau)} = \dfrac{\prod_{(r)} \mathfrak{S}_2\left(\frac{r}{n}\right)}{\prod_{(r)} \mathfrak{S}_3\left(\frac{r}{n}\right)}, \\ (4) & \dfrac{\psi(n\tau)}{\psi(\tau)} = \dfrac{\prod_{(r)} \mathfrak{S}_4\left(\frac{r}{n}\right)}{\prod_{(r)} \mathfrak{S}_3\left(\frac{r}{n}\right)}, \\ (5) & \dfrac{\chi(n\tau)}{\chi(\tau)} = \dfrac{[\mathrm{h}(\tau)]^{\frac{n-1}{2}}}{\prod_{(r)} \mathfrak{S}_3\left(\frac{r}{n}\right)}, \\ & \left(r = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right), \end{array} \right.$$

$$(\text{LIII})\quad\left\{\begin{aligned}
&(6)\quad q^{-\frac{n^2-1}{8n}}[\mathrm{h}(\tau)]^{3\frac{n-1}{2}} = \prod_{(r)}\left[\mathfrak{S}_2\left(\frac{r\tau}{n}\right)\mathfrak{S}_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)\mathfrak{S}_4\left(\frac{r\tau}{n}\right)\right],\\
&(7)\quad i^{\frac{n-1}{2}} q^{-\frac{n^2-1}{24n}}\,\mathrm{h}\left(\frac{\tau}{n}\right)[\mathrm{h}(\tau)]^{\frac{n-3}{2}} = \prod_{(r)}\mathfrak{S}_1\left(\frac{r\tau}{n}\right),\\
&(8)\quad \frac{\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\varphi(\tau)} = \frac{\prod\limits_{(r)}\mathfrak{S}_2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\prod\limits_{(r)}\mathfrak{S}_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)},\\
&(9)\quad \frac{\psi\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\psi(\tau)} = \frac{\prod\limits_{(r)}\mathfrak{S}_4\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\prod\limits_{(r)}\mathfrak{S}_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)},\\
&(10)\quad \frac{\chi\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\chi(\tau)} = q^{-\frac{n^2-1}{24n}}\frac{[\mathrm{h}(\tau)]^{\frac{n-1}{2}}}{\prod\limits_{(r)}\mathfrak{S}_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)},\\
&\qquad\qquad\left(r = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right).
\end{aligned}\right.$$

270 Il importe de remarquer que, puisqu'on sait exprimer les fonctions $\mathfrak{S}(nv\,|\,n\tau)$, $\mathfrak{S}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v\,|\,\tau)$, on sait, par cela même, exprimer, au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(v\,|\,\tau)$, les fonctions $\mathfrak{S}(nv\,|\,\tau)$; ces dernières, en effet, sont des fonctions entières, homogènes et du $n^{\text{ième}}$ degré des fonctions $\mathfrak{S}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$, comme le montrent les formules (LI_{6-8}), et les fonctions $\mathfrak{S}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$ sont des fonctions entières, homogènes et du $n^{\text{ième}}$ degré des fonctions $\mathfrak{S}(v\,|\,\tau)$, comme le montrent les formules (LII); les fonctions $\mathfrak{S}(nv)$ sont donc des fonctions entières, homogènes et du degré n^2 des fonctions $\mathfrak{S}(v)$. Cette conclusion subsiste même si n est pair, comme il est aisé de le voir en pensant aux formules relatives aux transformations de Landen et de Gauss Si l'on se borne au cas où n est impair, on obtient des formules équivalentes à celles dont nous venons de décrire la formation, en combinant les formules (LI_4) et (LII_4), où les expressions des fonc-

tions $\mathfrak{S}(nv \mid n\tau)$, $\mathfrak{S}\left(v \,\middle|\, \frac{\tau}{n}\right)$ comportent chacune un produit de n fonctions $\mathfrak{S}$ d'arguments différents; l'expression de chacune des fonctions $\mathfrak{S}(nv \mid \tau)$ comportera ainsi un produit de n^2 fonctions $\mathfrak{S}$; on trouve, en effet,

$$
\text{(LIV)} \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{A}\,\mathfrak{S}_1(nv) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{(\mu,\nu)} \mathfrak{S}_1\left(v + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu\tau}{n}\right),\\
\mathcal{A}\,\mathfrak{S}_2(nv) &= (-1)^{\sum\limits_{(r)} r} \prod_{(\mu,\nu)} \mathfrak{S}_2\left(v + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu\tau}{n}\right),\\
\mathcal{A}\,\mathfrak{S}_3(nv) &= \prod_{(\mu,\nu)} \mathfrak{S}_3\left(v + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu\tau}{n}\right),\\
\mathcal{A}\,\mathfrak{S}_4(nv) &= (-1)^{\sum\limits_{(r)} r} \prod_{(\mu,\nu)} \mathfrak{S}_4\left(v + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu\tau}{n}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

en supposant

$$
\begin{aligned}
r &= r_1, r_2, \ldots, r_{n-1},\\
\mu &= 0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1},\\
\nu &= 0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1},
\end{aligned}
$$

et en ayant posé, pour abréger,

$$
\mathcal{A} = q_0^{n^2-} \, q^{\frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{n}\sum\limits_{(r)} r^2} \, e^{-2v\pi i \sum\limits_{(r)} r}.
$$

271. Il est bon de jeter maintenant un coup d'œil d'ensemble sur les résultats obtenus dans les précédents numéros.

Que n soit impair ou pair, les fonctions $\mathfrak{S}(nv \mid n\tau)$, $\mathfrak{S}\left(v \,\middle|\, \frac{\tau}{n}\right)$ sont des polynomes entiers homogènes, du degré n par rapport aux fonctions $\mathfrak{S}(v \mid \tau)$, choisies convenablement. On peut dès lors regarder comme résolu le problème suivant :

Étant donnés quatre nombres entiers, a, b, c, d, dont le déterminant $\mathfrak{D} = ad - bc$ est positif, exprimer les fonctions $\mathfrak{S}(v \mid \tau)$ au moyen des fonctions $\mathfrak{S}(\mathrm{v} \mid \mathrm{T})$, en supposant

$$
\mathrm{v} = \frac{v}{a + b\tau}, \qquad \mathrm{T} = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}.
$$

Reportons-nous, en effet, aux résultats obtenus dans les nos 130-

133; reprenons les notations employées alors et rappelons-nous que nous ne considérons plus que des transformations à déterminant positif; on pourra énoncer le théorème suivant.

Il existe, d'une part, deux nombres entiers positifs λ, μ, assujettis seulement à vérifier la condition

$$\lambda\mu = ad - bc,$$

et à avoir pour plus grand commun diviseur le plus grand commun diviseur des nombres a, b, c, d; d'autre part, deux systèmes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ de nombres entiers, vérifiant les conditions

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

et tels que l'on ait

$$(a + b\tau)(\alpha' + \beta'T) = \lambda(\alpha + \beta\tau),$$
$$(a + b\tau)(\gamma' + \delta'T) = \mu(\gamma + \delta\tau),$$

il suffit, pour s'en convaincre, de supposer, dans les nos 130-133,

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \qquad T = \frac{\Omega_3}{\Omega_1};$$

mais, en vertu de la théorie de la transformation linéaire, les fonctions $\vartheta(v \mid \tau)$ ne diffèrent que par un facteur exponentiel et par des facteurs constants des fonctions

$$\vartheta\left(\frac{v}{\alpha + \beta\tau} \,\middle|\, \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right);$$

ces fonctions sont des polynomes homogènes et du degré λ par rapport aux fonctions

$$\vartheta\left[\frac{v}{\lambda(\alpha + \beta\tau)} \,\middle|\, \frac{\gamma + \delta\tau}{\lambda(\alpha + \beta\tau)}\right],$$

qui, en vertu des égalités précédentes, sont identiques aux fonctions

$$\vartheta\left[\frac{V}{\alpha' + \beta'T} \,\middle|\, \frac{\gamma' + \delta'T}{\mu(\alpha' + \beta'T)}\right],$$

et ces dernières sont des polynomes homogènes et du degré μ par rapport aux fonctions

$$\vartheta\left(\frac{V}{\alpha' + \beta'T} \,\middle|\, \frac{\gamma' + \delta'T}{\alpha' + \beta'T}\right),$$

qui ne diffèrent que par un facteur exponentiel et par des facteurs constants des fonctions $\vartheta(\mathrm{v} \mid \mathrm{\tau})$.

Finalement, les fonctions $\vartheta(v \mid \tau)$, à part un facteur exponentiel qu'il serait bien facile de calculer, sont des polynomes homogènes, de degré $\lambda\mu = ad - bc$ par rapport aux fonctions $\vartheta(\mathrm{v} \mid \mathrm{\tau})$. Le théorème du n° 130 conduit donc bien à l'expression des fonctions $\vartheta(v \mid \tau)$ au moyen des fonctions $\vartheta(\mathrm{v} \mid \mathrm{\tau})$, et l'on voit clairement le rôle des nombres λ, μ et l'avantage que présente leur introduction. C'est toutefois par des opérations *arithmétiques* exécutées sur les entiers a, b, c, d qu'on obtient ces nombres λ, μ, et il serait évidemment très intéressant d'avoir l'expression explicite, au moyen de ces nombres et des données, des polynomes en $\vartheta(\mathrm{v} \mid \mathrm{\tau})$, expression dont nous venons d'établir l'existence. C'est, toutefois, un problème que nous n'aborderons pas ici [1].

IX. — Sur un théorème de M. Hermite. Relations entre les fonctions ϑ. Théorèmes d'addition

272. C'est à la théorie des fonctions σ que nous avons rattaché la définition et les propriétés des fonctions ϑ. Toutefois, nous avons vu comment, dans bien des cas, il était tout aussi facile d'établir ces propriétés en partant de l'expression même de ces fonctions et, en particulier, de celle de la fonction

$$\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega_1}\right) = \sum_n e^{\frac{\omega_3 \pi i}{\omega_1} n^2 + \frac{u\pi i}{\omega_1} n},$$

qui est très simple.

M. Hermite a montré comment on pouvait prendre pour point de départ des séries analogues à celle qui précède pour engendrer des fonctions plus générales, en un certain sens, que les fonctions ϑ, qui toutefois, au moins dans le cas que nous considérons spécialement dans ce paragraphe, ne sont pas autre chose que

---

[1] Dans un Mémoire inséré au Tome XLIII des *Mathematische Annalen*, M. Krazer a résolu cette question et même une question plus générale. La méthode suivie par M. Krazer, où interviennent les séries trigonométriques et ces *sommes* de Gauss qui avaient déjà permis à M. Hermite de traiter le cas de la transformation linéaire, n'est pas de nature à être développée ici : nous nous

des combinaisons très simples de fonctions exponentielles et de fonctions $\Im$ prises avec des arguments convenables. L'illustre auteur a en outre établi, relativement à ces fonctions ainsi formées, une proposition très importante qui peut servir de principe dans

---

contenterons d'indiquer les notations dont se sert M Krazer (notations qui sont aussi celles employées par MM Prym et Krazer dans leur Ouvrage *Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thêtafunctionen*), et la nature du problème qu'il traite.

Il désigne par le symbole

$$\Im\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$$

la somme de la série

$$\sum_m e^{a(m+g)^2+2(m+g)(u+h\pi i)},$$

où m prend toutes les valeurs entières, a est la même quantité que nous désignons par $\tau\pi i$; u est la variable que nous désignons par $v\pi i$; g, h sont des constantes réelles quelconques. Pour nous rapprocher de nos notations, nous considérerons, en lui donnant le sens précédemment défini, le symbole

$$\Im\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v\pi i)_{\tau\pi i};$$

en attribuant à g et à h, dans ce symbole, les valeurs o, o, o, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$, o, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, on trouve les quatre fonctions $\Im_3(v\mid\tau)$, $\Im_4(v\mid\tau)$, $\Im_2(v\mid\tau)$, $i\Im_1(v\mid\tau)$.

Ceci posé, en désignant par a, b, c, d des nombres *entiers* dont le déterminant $ad - bc$ est positif, et en posant

$$\mathrm{V} = \frac{v}{a+b\tau}, \qquad \mathrm{T} = \frac{c+d\tau}{a+b\tau},$$

on peut exprimer la fonction

$$\Im\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v\pi i)_{\tau\pi i}$$

au moyen d'un nombre *fini* de fonctions

$$\Im\begin{bmatrix} g_r \\ h_r \end{bmatrix}(\mathrm{V}\pi i)_{\mathrm{T}\pi i}.$$

La méthode suivie par M Krazer consiste à décomposer la transformation $\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$ en transformations de types déterminés à coefficients *rationnels*, et à établir la formule de transformation pour ces transformations particulières En combinant ces formules, il parvient à la formule générale, qui appartient bien au type que nous avons décrit dans le texte, mais cette formule, d'ailleurs assez compliquée, est *explicite*, et n'implique pas un calcul arithmétique auxiliaire comme celui des nombres λ, μ.

la théorie des fonctions doublement périodiques; nous allons donner, d'après lui, quelques indications sur ce sujet.

273. Soit h un entier positif et considérons la fonction $\Phi(u)$ définie par l'égalité

$$(\text{LV}_1) \qquad \Phi(u) = \sum_n \text{A}_n q^{\frac{n^2}{h}} e^{2ni\pi v} = \sum_n \text{A}_n e^{\frac{\pi i \omega_3}{h\omega_1} n^2 + \frac{\pi i u}{\omega_1} n},$$

où les A_n sont des constantes qui se reproduisent périodiquement de h en h. Puisque la valeur absolue de q est plus petite que 1, il est clair que la série qui figure dans le second membre est absolument convergente et définit une fonction transcendante entière de la variable u, cette fonction admet manifestement la période $2\omega_1$ D'ailleurs, en décomposant en carrés l'exposant de e regardé comme un trinome du second degré en n, on obtient

$$\frac{\pi i \omega_3}{h\omega_1} n^2 + \frac{\pi i u}{\omega_1} n = \frac{\pi i \omega_3}{h\omega_1}\left(n + \frac{hu}{2\omega_3}\right)^2 - \frac{h\pi i u^2}{4\omega_1\omega_3},$$

d'où l'on conclut

$$\Phi(u) e^{\frac{h\pi i u^2}{4\omega_1\omega_3}} = \sum_n \text{A}_n e^{\frac{\pi i \omega_3}{h\omega_1}\left(n + \frac{hu}{2\omega_3}\right)^2}.$$

Si l'on change u en $u + 2\omega_3$, le second membre ne change évidemment pas, à cause de l'hypothèse

$$\text{A}_{n+h} = \text{A}_n,$$

il en résulte que le premier membre admet la période $2\omega_3$, et l'on en conclut immédiatement

$$\Phi(u + 2\omega_3) = e^{-\frac{h\pi i}{\omega_1}(u + \omega_3)} \Phi(u)$$

C'est là une propriété analogue à l'une de celles qui ont été établies pour les fonctions ϑ.

274. Le théorème de M. Hermite consiste en ce que la fonction $\Phi(u)$, formée comme on vient de l'expliquer, est la fonction transcendante entière la plus générale qui jouisse des deux pro-

priétés

$$(\mathrm{LV}_2)\qquad \begin{cases} \Phi(u+2\omega_1)=\Phi(u), \\ \Phi(u+2\omega_3)=e^{-\frac{h\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)}\Phi(u). \end{cases}$$

Considérons, en effet, une fonction transcendante entière $\Phi(u)$ qui jouisse de ces propriétés. Puisqu'elle admet $2\omega_1$ pour période, c'est une fonction univoque de

$$x=e^{\frac{u\pi i}{\omega_1}},$$

car cette dernière équation fait correspondre à chaque valeur de x une infinité de valeurs de u en progression arithmétique de raison $2\omega_1$ pour lesquelles la fonction $\Phi(u)$ doit reprendre la même valeur; en d'autres termes, la fonction

$$\Phi\left(\frac{\omega_1}{\pi i}\log x\right)$$

n'a qu'une seule valeur, quelle que soit la détermination choisie pour $\log x$, d'ailleurs aux environs de toute valeur x, différente de zéro, l'une quelconque des déterminations de la fonction $\log x$ est régulière; il en est donc de même de la fonction de x précédemment définie, puisque $\Phi(u)$ est, par hypothèse, une fonction (transcendante) entière. Mais alors, en vertu du théorème du commandant Laurent, cette fonction de x peut être mise sous la forme

$$\sum_n \mathrm{A}_n x^n,$$

les quantités A_n étant des coefficients indépendants de x. En modifiant un peu ces coefficients, on peut donc écrire

$$\Phi(u)=\sum_n \mathrm{A}_n q^{\frac{n^2}{h}} e^{\frac{nu\pi i}{\omega_1}}=\sum_n \mathrm{A}_n e^{\frac{n^2\omega_3\pi i}{h\omega_1}+\frac{nu\pi i}{\omega_1}}$$
$$=e^{-\frac{hu^2\pi i}{4\omega_1\omega_3}}\sum_n \mathrm{A}_n e^{\frac{\omega_3\pi i}{h\omega_1}\left(n+\frac{hu}{2\omega_3}\right)^2},$$

et, puisque la fonction

$$\Phi(u)e^{\frac{hu^2\pi i}{4\omega_1\omega_3}}$$

doit, par hypothèse, admettre la période $2\omega_3$, il doit en être de

même de la fonction

$$\sum_n A_n e^{\frac{\omega_3 \pi i}{h\omega_1}\left(n+\frac{hu}{2\omega_3}\right)^2};$$

on en conclut, en changeant u en $u+2\omega_3$ et n en $n-h$,

$$\sum_n A_n e^{\frac{\omega_3 \pi i}{h\omega_1}\left(n+\frac{hu}{2\omega_3}\right)^2} = \sum_n A_{n-h} e^{\frac{\omega_3 \pi i}{h\omega_1}\left(n+\frac{hu}{2\omega_3}\right)^2}$$

ou

$$\sum_n A_n q^{\frac{n^2}{h}} x^n = \sum_n A_{n-h} q^{\frac{n^2}{h}} x^n,$$

or le développement, suivant les puissances entières positives et négatives de x, d'une fonction univoque de x, régulière aux environs de chaque point x, sauf le point $x=0$, ne peut être effectué que d'une seule façon; on a donc

$$A_n = A_{n-h},$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

275. Le rôle des fonctions

$$\Phi(u) = \sum_n A_n q^{\frac{n^2}{h}} e^{\frac{nu\pi i}{\omega_1}} \qquad (A_{n+h} = A_n),$$

dans la théorie des fonctions doublement périodiques, résulte de la remarque suivante : Une telle fonction, outre les données ω_1, ω_3, h, contient h constantes arbitraires $A_0, A_1, \ldots, A_{h-1}$. Considérons une autre fonction $\Psi(u)$ formée de la même manière avec d'autres constantes $B_0, B_1, \ldots, B_{h-1}$; on voit de suite, en se reportant aux propriétés fondamentales de la fonction Φ, que l'expression

$$\frac{\Phi(u-a)}{\Psi(u-a)},$$

où a désigne encore une constante arbitraire, admet les deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$. Voici donc une manière de former, par le quotient de deux fonctions transcendantes entières, une fonction dou-

blement périodique, contenant $2h$ constantes arbitraires, savoir :

$$a,\quad \frac{A_0}{B_0},\quad \frac{A_1}{B_0},\quad \ldots,\quad \frac{A_{h-1}}{B_0},\quad \frac{B_1}{B_0},\quad \ldots,\quad \frac{B_{h-1}}{B_0}.$$

On verra plus tard que c'est l'expression la plus générale des fonctions doublement périodiques univoques n'admettant pas d'autre singularité que des pôles et ayant h pôles dans le parallélogramme des périodes.

276. Revenons à la fonction $\Phi(u)$. On peut, en réunissant dans la série qui la définit les termes qui ont un même coefficient, l'exprimer comme il suit

$$\Phi(u) = A_0\Phi_0 + A_1\Phi_1 + \ldots + A_{h-1}\Phi_{h-1},$$

en posant

$$\begin{aligned}\Phi_r(u) &= \sum_n q^{\frac{(nh+r)^2}{h}} e^{(nh+r)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ &= \sum_n e^{\frac{\omega_3\pi i}{h\omega_1}\left[(nh+r)^2 + \frac{(nh+r)hu}{\omega_3}\right]} \\ &= e^{-\frac{hu^2\pi i}{4\omega_1\omega_3}} \sum_n e^{\frac{\omega_3\pi i}{h\omega_1}\left(nh+r+\frac{hu}{2\omega_3}\right)^2}.\end{aligned}$$

Dans ces formules, r est l'un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, h-1$; on peut même lui donner telle valeur entière que l'on voudra, pourvu que l'on convienne que le symbole $\Phi_r(u)$ représente toujours la même fonction quand on remplace le nombre entier r par un autre qui lui soit congru suivant le module h.

Sur la première définition de la fonction $\Phi_r(u)$, on voit immédiatement que l'on a

$$\Phi_r\left(u + \frac{2\omega_1}{h}\right) = e^{\frac{2r\pi i}{h}}\Phi_r(u)$$

Sur la dernière, au contraire, en désignant par s un entier quelconque et en remplaçant u' par $u + s\frac{2\omega_3}{h}$, on aperçoit de suite la propriété qu'exprime l'égalité

$$\Phi_{r+s}(u)\, e^{\frac{h\pi i}{4\omega_1\omega_3}u^2} = \Phi_r\left(u + s\frac{2\omega_3}{h}\right) e^{\frac{h\pi i}{4\omega_1\omega_3}\left(u+s\frac{2\omega_3}{h}\right)^2},$$

ou

$$\Phi_r\left(u+s\frac{2\omega_3}{h}\right)=\Phi_{r+s}(u)\,e^{-\frac{s\pi i}{\omega_1}\left(u+s\frac{\omega_3}{h}\right)}.$$

Si l'on prend en particulier $r=0$, et que l'on écrive ensuite r au lieu de s, on a

$$\Phi_r(u)=\Phi_0\left(u+r\frac{2\omega_3}{h}\right)e^{\frac{r\pi i}{\omega_1}\left(u+r\frac{\omega_3}{h}\right)},$$

on a d'ailleurs

$$\Phi_0(u)=\sum_n q^{n^2h}\,e^{\frac{nhu\pi i}{\omega_1}}=\sum_n q^{n^2h}\,e^{2nhv\pi i}=\vartheta_3(hv\mid h\tau),$$

et, par suite,

$$(\mathrm{LV}_3)\qquad \Phi_r(u)=q^{\frac{r^2}{h}}\,e^{2rv\pi i}\,\vartheta_3(hv+r\tau\mid h\tau)$$

Remarquons en passant que, puisque l'on connaît les zéros de la fonction ϑ_3, on a par cela même les zéros de la fonction $\Phi_r(u)$.

277. De ce que $\Phi(u)$ est la fonction la plus générale vérifiant les équations (LV_2) on déduit, entre autres conséquences, en remarquant que, pour $h=1$, on a

$$\Phi(u)=\mathrm{A}_0\,\Phi_0(u)=\mathrm{A}_0\,\vartheta_3(v),$$

où A_0 est une constante arbitraire, que $\mathrm{A}_0\,\vartheta_3(v)$ est la fonction entière la plus générale $f(v)$ qui vérifie les deux équations fonctionnelles

$$\vartheta_3(v+1)=\vartheta_3(v),$$
$$\vartheta_3\left(v+\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)=e^{-(v\omega_1+\omega_3)\frac{2\pi i}{\omega_1}}\,\vartheta_3(v),$$

et cette propriété peut servir de définition à la fonction $\vartheta_3(v)$ si l'on y joint la valeur de $\vartheta_3(0)$.

278. Nous allons maintenant, en l'appliquant à quelques exemples, montrer la portée du théorème de M. Hermite.

Considérons d'abord les carrés des quatre fonctions $\vartheta\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)$. En désignant par $\Phi(u)$ l'un quelconque de ces carrés et en se reportant aux formules $(\mathrm{XXXIV}_{3,5})$, on voit de suite que la

fonction $\Phi(u)$ jouit des propriétés

$$\Phi(u+2\omega_1)=\Phi(u),$$
$$\Phi(u+2\omega_3)=\Phi(u)\,e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)}$$

Ces équations ne sont autres que les équations fonctionnelles fondamentales dans le cas de $h=2$. Il résulte de là que les quatre fonctions $\vartheta^2(v)$ sont, d'après le théorème de M. Hermite, des fonctions linéaires des deux fonctions $\Phi_0(u)$, $\Phi_1(u)$. Or, deux de ces équations linéaires qui expriment $\vartheta_1^2(v)$, $\vartheta_2^2(v)$, $\vartheta_3^2(v)$, $\vartheta_4^2(v)$ linéairement en Φ_0, Φ_1 peuvent être résolues par rapport à Φ_0, Φ_1 ; car autrement il faudrait que les carrés des fonctions ϑ correspondantes fussent dans un rapport constant, ce qui est impossible, puisque ces fonctions n'ont pas les mêmes zéros. En portant les valeurs trouvées pour Φ_0, Φ_1 dans les équations qui n'ont pas été utilisées, on voit que les carrés de deux quelconques des fonctions ϑ doivent pouvoir s'exprimer linéairement au moyen des carrés des deux autres fonctions ϑ. On doit donc avoir des relations telles que

$$\vartheta_2^2(v)=A\,\vartheta_1^2(v)+B\,\vartheta_3^2(v),$$
$$\vartheta_4^2(v)=A'\vartheta_1^2(v)+B'\vartheta_3^2(v),$$

où A, A′, B, B′ sont des constantes que l'on déterminera en faisant successivement $v=0$, $v=\frac{1+\tau}{2}$, on obtiendra ainsi, en tenant compte des formules (XXXIV_8, XXXVII_{1-2}),

$$B=\frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}=k,\qquad B'=\frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}=k',$$

$$A=\frac{\vartheta_2^2\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}=-\frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}=-k',$$

$$A'=\frac{\vartheta_4^2\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}=\frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}=k$$

On a donc

$$(\text{LVI}_1)\qquad \begin{cases}\vartheta_2^2(v)=-k'\vartheta_1^2(v)+k\,\vartheta_3^2(v),\\ \vartheta_4^2(v)=k\,\vartheta_1^2(v)+k'\vartheta_3^2(v)\end{cases}$$

En posant, dans la dernière relation, $v = \frac{1}{2}$ et faisant usage des formules (XXXIV_4), on trouve

$$\vartheta_3^2(0) = k\vartheta_2^2(0) + k'\vartheta_4^2(0),$$

et l'on obtient ainsi une seconde démonstration des égalités

$$k^2 + k'^2 = 1, \qquad \vartheta_3^4(0) = \vartheta_2^4(0) + \vartheta_4^4(0).$$

Au surplus, les relations si simples que nous venons de déduire du théorème de M. Hermite ne diffèrent pas, au fond, des relations

$$\sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u = (e_\beta - e_\alpha)\sigma^2 u,$$

ainsi qu'il résulte des formules de passage des fonctions σ aux fonctions ϑ.

Observons aussi qu'en faisant usage des relations (LVI_1), on transforme aisément l'une dans l'autre les trois expressions données au n° 260 pour chacune des fonctions $\vartheta(nv \mid n\tau)$ au moyen des fonctions $\vartheta(v \mid \tau)$

279. Nous avons dit plus haut que les carrés des fonctions ϑ s'expriment linéairement au moyen des fonctions

$$\Phi_0(u) = \vartheta_3(2v \mid 2\tau),$$
$$\Phi_1(u) = q^{\frac{1}{2}} e^{2v\pi i}\vartheta_3(2v + \tau \mid 2\tau) = \vartheta_2(2v \mid 2\tau).$$

Nous laissons au lecteur le soin de déterminer les coefficients et de parvenir par cette nouvelle voie aux formules (XLVII_3) qui expriment $\vartheta_3(2v \mid 2\tau)$, $\vartheta_2(2v \mid 2\tau)$ au moyen des carrés des fonctions $\vartheta(v)$.

Par le même procédé on reconnaîtra encore que les quatre fonctions

$$\vartheta(v + c)\vartheta(v - c),$$

où c est une constante, sont des fonctions linéaires des carrés de deux quelconques des fonctions $\vartheta(v)$ Les constantes se détermineront comme tout à l'heure et l'on obtiendra ainsi des formules qui ne diffèrent pas, au fond, des relations (XV_{1-3}) entre les fonctions σ. Parmi ces formules, nous nous contenterons

d'écrire les suivantes :

$$(\text{LVI}_2)\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{I}^2_{\alpha+1}(0)\mathfrak{I}_1(v+c)\mathfrak{I}_1(v-c)= \mathfrak{I}^2_{\alpha+1}(c)\mathfrak{I}^2_1(v)-\mathfrak{I}^2_1(c)\mathfrak{I}^2_{\alpha+1}(v),\\
&\mathfrak{I}^2_3(0)\mathfrak{I}_2(v+c)\mathfrak{I}_2(v-c) =-\mathfrak{I}^2_4(c)\mathfrak{I}^2_1(v) +\mathfrak{I}^2_2(c)\mathfrak{I}^2_3(v),\\
&\mathfrak{I}^2_3(0)\mathfrak{I}_3(v+c)\mathfrak{I}_3(v-c) = \mathfrak{I}^2_1(c)\mathfrak{I}^2_1(v) +\mathfrak{I}^2_3(c)\mathfrak{I}^2_3(v),\\
&\mathfrak{I}^2_3(0)\mathfrak{I}_4(v+c)\mathfrak{I}_4(v-c) = \mathfrak{I}^2_2(c)\mathfrak{I}^2_1(v) +\mathfrak{I}^2_4(c)\mathfrak{I}^2_3(v).
\end{aligned}\right.$$

280. Il convient de joindre à ces relations des relations analogues, mais où figurent des fonctions $\mathfrak{I}$ avec des indices différents. On pourra les obtenir par une voie analogue, si l'on observe que l'analyse du n° 274 permet de trouver les fonctions transcendantes entières les plus générales qui satisfont aux équations fonctionnelles

$$\Phi(u+2\omega_1)=\varepsilon\,\Phi(u),$$
$$\Phi(u+2\omega_3)=\varepsilon'\Phi(u)e^{-\frac{h\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)},$$

où les symboles ε, ε' désignent soit $+1$, soit -1. Dans chacun des quatre cas possibles, comme dans le cas $\varepsilon=1$, $\varepsilon'=1$, les fonctions cherchées se composent linéairement avec h fonctions transcendantes entières parfaitement déterminées. Cette remarque suffit, pour le problème qui nous occupe, à prouver l'existence de relations de la forme

$$\mathfrak{I}_\lambda(v+c)\mathfrak{I}_\mu(v-c)=\text{A}\,\mathfrak{I}_\lambda(v)\mathfrak{I}_\mu(v)+\text{B}\,\mathfrak{I}_\nu(v)\mathfrak{I}_\rho(v),$$
$$\mathfrak{I}_\nu(v+c)\mathfrak{I}_\rho(v-c)=\text{A}'\mathfrak{I}_\lambda(v)\mathfrak{I}_\mu(v)+\text{B}'\mathfrak{I}_\nu(v)\mathfrak{I}_\rho(v),$$

où λ, μ, ν, ρ sont les nombres 1, 2, 3, 4, rangés dans un certain ordre, et où A, B, A′, B′ sont des quantités indépendantes de v, qu'on détermine en supposant $v=0$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$. Le lecteur pourra appliquer cette méthode, ou encore déduire les résultats des formules (XV_4) et (XV_5) en passant des σ au $\mathfrak{I}$, nous nous contenterons de transcrire les résultats.

$$(\text{LVI}_3)\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{I}_3(0)\mathfrak{I}_4(0)\mathfrak{I}_1(v+c)\mathfrak{I}_2(v-c)\\
&\qquad=\mathfrak{I}_3(c)\mathfrak{I}_4(c)\mathfrak{I}_1(v)\mathfrak{I}_2(v)+\mathfrak{I}_1(c)\mathfrak{I}_2(c)\mathfrak{I}_3(v)\mathfrak{I}_4(v),\\
&\mathfrak{I}_3(0)\mathfrak{I}_4(0)\mathfrak{I}_3(v+c)\mathfrak{I}_4(v-c)\\
&\qquad=\mathfrak{I}_1(c)\mathfrak{I}_2(c)\mathfrak{I}_1(v)\mathfrak{I}_2(v)+\mathfrak{I}_3(c)\mathfrak{I}_4(c)\mathfrak{I}_3(v)\mathfrak{I}_4(v)
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{LVI}_4)\ \begin{cases} \vartheta_2(0)\vartheta_4(0)\vartheta_1(v+c)\vartheta_3(v-c) \\ \quad = +\vartheta_2(c)\vartheta_4(c)\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)+\vartheta_1(c)\vartheta_3(c)\vartheta_2(v)\vartheta_4(v), \\ \vartheta_2(0)\vartheta_4(0)\vartheta_2(v+c)\vartheta_4(v-c) \\ \quad = -\vartheta_1(c)\vartheta_3(c)\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)+\vartheta_2(c)\vartheta_4(c)\vartheta_2(v)\vartheta_4(v) \end{cases}$$

$$(\mathrm{LVI}_5)\ \begin{cases} \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_1(v+c)\vartheta_4(v-c) \\ \quad = +\vartheta_2(c)\vartheta_3(c)\vartheta_1(v)\vartheta_4(v)+\vartheta_1(c)\vartheta_4(c)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v), \\ \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_2(v+c)\vartheta_3(v-c) \\ \quad = -\vartheta_1(c)\vartheta_4(c)\vartheta_1(v)\vartheta_4(v)+\vartheta_2(c)\vartheta_3(c)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v). \end{cases}$$

281. Au reste, toutes ces relations, que nous avons tenu à écrire, à cause de l'usage qu'on peut avoir à en faire, sont des cas particuliers d'une identité générale, de même que les relations équivalentes entre les fonctions σ (XV_{1-5}) sont des conséquences de l'identité (VII_2), établie au n° 96. Pour déduire de cette identité l'identité correspondante entre les fonctions ϑ, il suffira de remplacer la fonction σ par son expression au moyen de la fonction ϑ_1 et de remarquer que l'on a

$$\begin{aligned} &(u+a)^2+(u-a)^2+(b+c)^2+(b-c)^2 \\ = &(u+b)^2+(u-b)^2+(c+a)^2+(c-a)^2 \\ = &(u+c)^2+(u-c)^2+(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(u^2+a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

On obtiendra ainsi la relation

$$(\mathrm{LVII}_2)\ \begin{cases} \quad\vartheta_1(v+a)\vartheta_1(v-a)\vartheta_1(b+c)\vartheta_1(b-c) \\ +\vartheta_1(v+b)\vartheta_1(v-b)\vartheta_1(c+a)\vartheta_1(c-a) \\ +\vartheta_1(v+c)\vartheta_1(v-c)\vartheta_1(a+b)\vartheta_1(a-b) = 0, \end{cases}$$

où il est à peine utile de prévenir que les quantités a, b, c représentent celles que l'on désignait de cette façon dans le n° 96, divisées par $2\omega_1$.

282. De cette identité, on en déduit plusieurs autres analogues, soit en augmentant l'une ou l'autre des quantités u, a, b, c de $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$, ou en attribuant quelque valeur particulière à ces variables Nous ne voulons pas ici faire cette étude, que l'on trouvera tout au long dans la *Théorie des fonctions elliptiques*

de Briot et Bouquet [1]; nous nous bornerons aux remarques suivantes, tirées, pour la plupart, d'un beau Mémoire de Kronecker sur le même sujet [2].

Remplaçons les lettres v, u, b, c par a, b, c, d et posons en général pour $\rho = 1, 2, 3, 4$,

$$
(\text{LVII}_1) \quad \begin{cases} T_\rho = \mathfrak{S}_\rho(a+b)\mathfrak{S}_\rho(a-b)\mathfrak{S}_\rho(c+d)\mathfrak{S}_\rho(c-d), \\ T'_\rho = \mathfrak{S}_\rho(a+c)\mathfrak{S}_\rho(a-c)\,\mathfrak{S}_\rho(d+b)\mathfrak{S}_\rho(d-b), \\ T''_\rho = \mathfrak{S}_\rho(a+d)\mathfrak{S}_\rho(a-d)\mathfrak{S}_\rho(b+c)\mathfrak{S}_\rho(b-c), \end{cases}
$$

où les trois expressions T, T', T'' se déduisent les unes des autres par permutation circulaire des lettres b, c, d

L'identité fondamentale (LVII_2) pourra s'écrire

$$T_1 + T'_1 + T''_1 = 0.$$

Observons que, par les vingt-quatre permutations des lettres a, b, c, d, les quantités T_ρ, T'_ρ, T''_ρ se reproduisent, rangées dans un ordre quelconque, si ρ n'est pas égal à 1, et que les quantités T_1, T'_1, T''_1 sont remplacées par une de leurs permutations circulaires ou par une des permutations circulaires des quantités $-T_1$, $-T''_1$, $-T'_1$.

On voit, en particulier, que l'identité fondamentale

$$T_1 + T'_1 + T''_1 = 0$$

se reproduit pour toutes les permutations des quatre lettres a, b, c, d

Si maintenant on ajoute aux quantités a, c, successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, on trouve

$$
(\text{LVII}_3) \quad \begin{cases} T_2 - T'_1 - T''_2 = 0, \\ T_3 - T'_1 - T''_3 = 0, \\ T_4 - T'_1 - T''_4 = 0 \end{cases}
$$

Sans nous arrêter aux équations que l'on peut déduire de celles-là par les permutations des lettres a, b, c, d, observons qu'on en

---

[1] Deuxième édition, liv. VII, p 486 et suiv.

[2] *Journal de Crelle*, t 102, p 260

tire, en ajoutant

$$(\text{LVII}_4)\qquad \begin{cases} T_2+T_3=T''_2+T''_3, \\ T_3+T_4=T''_3+T''_4, \end{cases}$$

d'où, en permutant circulairement b, c, d,

$$(\text{LVII}_4)\qquad \begin{cases} T'_2+T'_3=T_2+T_3, \\ T'_3+T'_4=T_3+T_4 \end{cases}$$

283. Ces identités ont été données par Jacobi sous une forme à peine différente. Considérons, par exemple, la relation

$$T_2+T_3=T'_2+T'_3.$$

Si l'on pose

$$a+b=w, \qquad a-b=x, \qquad c+d=y, \qquad c-d=z,$$

on voit de suite que cette identité peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{S}_2(w)\mathfrak{S}_2(x)\mathfrak{S}_2(y)\mathfrak{S}_2(z)+\mathfrak{S}_3(w)\mathfrak{S}_3(x)\mathfrak{S}_3(y)\mathfrak{S}_3(z) \\
&\quad =\mathfrak{S}_2(w')\mathfrak{S}_2(x')\mathfrak{S}_2(y')\mathfrak{S}_2(z')+\mathfrak{S}_3(w')\mathfrak{S}_3(x')\mathfrak{S}_3(y')\mathfrak{S}_3(z'),
\end{aligned}$$

en regardant les variables x, y, z, w, x', y', z', w' comme liées entre elles par les systèmes équivalents d'équations

$$\begin{aligned}
w' &= \frac{1}{2}(w+x+y+z), &\qquad w &= \frac{1}{2}(w'+x'+y'+z'), \\
x' &= \frac{1}{2}(w+x-y-z), & x &= \frac{1}{2}(w'+x'-y'-z'), \\
y' &= \frac{1}{2}(w-x+y-z), & y &= \frac{1}{2}(w'-x'+y'-z'), \\
z' &= \frac{1}{2}(w-x-y+z), & z &= \frac{1}{2}(w'-x'-y'+z')
\end{aligned}$$

284. C'est d'ailleurs par une voie tout autre que Jacobi parvient à cette identité : cette voie est *directe;* elle consiste à effectuer la multiplication des séries qui représentent $\mathfrak{S}_2(w)$, $\mathfrak{S}_2(x)$, $\mathfrak{S}_2(y)$, $\mathfrak{S}_2(z)$, $\mathfrak{S}_3(w)$, ... Outre son intérêt propre, elle offre un grand intérêt théorique ; elle équivaut, en effet, à un *principe* dans la théorie qui nous occupe. Le lecteur n'aura aucune peine à reconnaître que de cette identité et de celle qu'on en déduit en ajoutant à une ou plusieurs des variables 1, τ, $1+\tau$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$, on

peut tirer très facilement les relations entre les carrés des fonctions $\mathfrak{S}$, ou entre les produits de deux fonctions $\mathfrak{S}$ avec les arguments $x+y$, $x-y$, qui ont été obtenues dans ce paragraphe au moyen du théorème de M. Hermite; en sorte que l'identité de Jacobi peut, comme l'auteur l'a montré lui-même ([1]), servir de fondement à une théorie des fonctions elliptiques. Kronecker, dans le Mémoire précédemment cité, a amené l'analyse de Jacobi à un haut degré d'élégance et de généralité, nous ne la reproduirons cependant pas. Nous donnerons de préférence, pour initier le lecteur à ce genre de spéculations, la démonstration d'une belle formule qu'on doit à Schröter, formule dont un cas particulier nous conduira facilement à l'identité de Jacobi et dont nous aurons d'ailleurs à tirer parti plus tard, pour la formation des équations modulaires. La formule de Schröter pourrait être établie autrement que nous n'allons faire ([2]), le théorème de M. Hermite, qui a fait le premier objet de ce paragraphe, offrirait, en particulier, un chemin pour y parvenir.

285. Désignons par α, β des nombres entiers positifs et envisageons le produit des deux fonctions $\mathfrak{S}_3(x\,|\,\alpha\tau)$, $\mathfrak{S}_3(y\,|\,\beta\tau)$.

En se reportant à l'expression (XXXII$_3$) de $\mathfrak{S}_3(v\,|\,\tau)$, on voit que ce produit peut être mis sous la forme

$$\mathfrak{S}_3(x\,|\,\alpha\tau)\,\mathfrak{S}_3(y\,|\,\beta\tau)=\sum_{\mu,\,\nu} q^{\alpha\mu^2+\beta\nu^2}e^{2i\pi(\mu x+\nu y)},$$

où le second membre est une série à double entrée, absolument convergente, dont les termes peuvent être groupés comme l'on

---

([1]) *Theorie der elliptischen Functionen, aus den Eigenschaften der Thétafunctionen abgeleitet* (*Œuvres*, t. I, p. 499).

([2]) M. Herstowski (*Math. Annalen*, t. XI, p. 1-29) parvient à cette formule, ainsi qu'à d'autres relations que nous rencontrerons plus tard, en effectuant la multiplication des produits infinis qui représentent les fonctions $\mathfrak{S}$.

Sauf quelques modifications sans importance, nous reproduisons ici (n^{os} 285-286) l'analyse de Schröter d'après Enneper (*Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte*, 2^e édit.). Puisque nous avons l'occasion de citer cet Ouvrage, excellent à bien des égards, il convient de signaler au lecteur, en particulier, la richesse des renseignements historiques et bibliographiques qu'il pourra y puiser.

veut. Nous supposerons d'abord qu'on effectue la somme

$$A_\mu = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\alpha\mu^2+\beta\nu^2} e^{2i\pi(\mu x+\nu y)},$$

on aura ensuite à effectuer la somme $\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} A_\mu$.

Il est clair que, μ restant fixe, lorsque ν prend toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, il en est de même de $\nu-\mu$ et inversement On peut donc remplacer, dans l'expression de A_μ, ν par $\mu+\rho$, et faire prendre à ρ, comme à ν, toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. D'un autre côté, si l'on désigne par s un nombre entier quelconque, et par r un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \alpha+\beta-1$, il est clair qu'un nombre entier ρ peut, et d'une seule façon, être mis sous la forme

$$\rho = (\alpha+\beta)s + r$$

Réciproquement, quand on donne à s toutes les valeurs entieres de $-\infty$ à $+\infty$, et à r toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \alpha+\beta-1$, l'expression $(\alpha+\beta)s+r$ représente successivement, et chacun une fois seulement, les différents nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$ On peut donc, finalement, remplacer, dans A_μ, l'indice ν par

$$\mu+(\alpha+\beta)s+r,$$

et donner ensuite à s les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, à r les valeurs entières de 0 à $\alpha+\beta-1$.

Par cette substitution, on trouve, après des réductions immédiates,

$$\alpha\mu^2+\beta\nu^2 = (\alpha+\beta)(\mu+\beta s)^2 + 2\beta r(\mu+\beta s) + \alpha\beta(\alpha+\beta)s^2 + 2\alpha\beta rs + \beta r^2,$$
$$\mu x+\nu y = (\mu+\beta s)(x+y) + s(\alpha y-\beta x) + ry$$

Si donc, dans A_μ, on groupe les termes où r est le même, et si l'on remarque que dans tous ces termes on peut mettre en facteur $q^{\beta r^2}$ et $e^{2i\pi ry}$, on voit que l'on peut écrire

$$A_\mu = \sum_{r=0}^{r=\alpha+\beta-1} q^{\beta r^2} e^{2ri\pi y} B_\mu,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$B_\mu = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} C_{\mu,s},$$

$C_{\mu,s}$ étant le produit de

$$q^{(\alpha+\beta)(\mu+\beta s)^2+2\beta r(\mu+\beta s)+\alpha\beta(\alpha+\beta)s^2+2\alpha\beta rs}$$

par

$$e^{2i\pi[(\mu+\beta s)(x+y)+s(\alpha y-\beta x)]}$$

Le produit des deux fonctions $\vartheta_3(x \mid \alpha\tau)$, $\vartheta_3(y \mid \beta\tau)$ peut donc être mis sous la forme

$$\vartheta_3(x \mid \alpha\tau)\,\vartheta_3(y \mid \beta\tau) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} A_\mu = \sum_{r=0}^{r=\alpha+\beta-1} \left[q^{\beta r^2} e^{2ri\pi y} \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} B_\mu \right],$$

où

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} B_\mu = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} C_{\mu,s} = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} C_{\mu,s}.$$

Séparons, dans l'expression de $C_{\mu,s}$, les facteurs qui ne dépendent que de $\mu + \beta s$ et ceux qui dépendent de s seul, nous aurons

$$\begin{aligned} C_{\mu,s} &= q^{(\alpha+\beta)(\mu+\beta s)^2+2\beta r(\mu+\beta s)} e^{2i\pi(\mu+\beta s)(x+y)} q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)s^2+2\alpha\beta r s} e^{2i\pi s(\alpha y-\beta x)} \\ &= q^{(\alpha+\beta)(\mu+\beta s)^2} e^{2i\pi(\mu+\beta s)(x+y+r\beta\tau)} q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)s^2} e^{2i\pi s(\alpha y-\beta x+r\alpha\beta\tau)} \end{aligned}$$

En tenant compte de cette dernière forme pour évaluer $\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} C_{\mu,s}$ et en observant que, s restant fixe et μ prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, $s' = \mu + \beta s$ prend aussi toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, on voit que la somme $\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} C_{\mu,s}$ est le produit de

$$q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)s^2} e^{2i\pi s(\alpha y-\beta x+r\alpha\beta\tau)}$$

par

$$\sum_{s=-\infty}^{s'=+\infty} q^{(\alpha+\beta)s'^2} e^{2i\pi s'(x+y+r\beta\tau)},$$

or cette dernière somme n'est autre chose que

$$\vartheta_3[x+y+r\beta\tau \mid (\alpha+\beta)\tau],$$

on a donc,

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} B_\mu = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} C_{\mu,s}$$

$$= \mathfrak{S}_3[x+y+r\beta\tau \,|\, (\alpha+\beta)\tau] \times \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)s^2} e^{2i\pi s(\alpha y - \beta x + r\alpha\beta\tau)}$$

$$= \mathfrak{S}_3[x+y+r\beta\tau \,|\, (\alpha+\beta)\tau]\; \mathfrak{S}_3[\alpha y - \beta x + r\alpha\beta\tau \,|\, \alpha\beta(\alpha+\beta)\tau]$$

et, par suite, enfin

$$(\text{LVIII}_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{S}_3(x \,|\, \alpha\tau)\,\mathfrak{S}_3(y \,|\, \beta\tau) \\ &\quad = \sum_{r=0}^{r=\alpha+\beta-1} q^{\beta r^2} e^{2ri\pi y}\,\mathfrak{S}_3[x+y+r\beta\tau \,|\, (\alpha+\beta)\tau] \\ &\qquad \times \mathfrak{S}_3[\alpha y - \beta x + r\alpha\beta\tau \,|\, \alpha\beta(\alpha+\beta)\tau] \\ &\quad = \sum_{r=0}^{r=\alpha+\beta-1} q^{\alpha r^2} e^{2ri\pi x}\,\mathfrak{S}_3[x+y+r\alpha\tau \,|\, (\alpha+\beta)\tau] \\ &\qquad \times \mathfrak{S}_3[\beta x - \alpha y + r\alpha\beta\tau \,|\, \alpha\beta(\alpha+\beta)\tau), \end{aligned}\right.$$

la dernière égalité ayant lieu en vertu de ce que le premier membre ne change pas quand on change α en β et x en y, simultanément. C'est la formule annoncée.

286. Pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, l'égalité précédente, en tenant compte des formules (XXXIV_6), devient

$$(\text{LVIII}_2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}_3(x)\mathfrak{S}_3(y) &= \mathfrak{S}_3(x+y \,|\, 2\tau)\,\mathfrak{S}_3(x-y \,|\, 2\tau) \\ &+ \mathfrak{S}_2(x+y \,|\, 2\tau)\,\mathfrak{S}_2(x-y \,|\, 2\tau) \end{aligned}\right.$$

En changeant dans cette formule x, y en $x+\frac{\tau}{2}$, $y+\frac{\tau}{2}$, on obtient encore

$$(\text{LVIII}_3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}_2(x)\,\mathfrak{S}_2(y) &= \mathfrak{S}_2(x+y \,|\, 2\tau)\,\mathfrak{S}_3(x-y \,|\, 2\tau) \\ &+ \mathfrak{S}_3(x+y \,|\, 2\tau)\,\mathfrak{S}_2(x-y \,|\, 2\tau) \end{aligned}\right.$$

Observons en passant que, en faisant $x = y$, on retrouve deux des formules relatives à la transformation de Landen.

Ce sont les formules (LVIII_{2-3}) qui vont nous conduire à l'identité de Jacobi. Si l'on désigne par x, y, z, w quatre variables indépendantes, on en déduit, en appliquant ces formules d'une

part aux variables x, y, d'autre part aux variables z, w, et en formant la fonction

$$\mathfrak{S}_3(x)\mathfrak{S}_3(y)\mathfrak{S}_3(z)\mathfrak{S}_3(w)+\mathfrak{S}_2(x)\mathfrak{S}_2(y)\mathfrak{S}_2(z)\mathfrak{S}_2(w)$$

que cette fonction s'exprime très simplement au moyen des quatre quantités

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{S}_3(x+y\,|\,2\tau)\mathfrak{S}_3(z+w\,|\,2\tau)+\mathfrak{S}_2(x+y\,|\,2\tau)\mathfrak{S}_2(z+w\,|\,2\tau),\\
\mathfrak{S}_3(x-y\,|\,2\tau)\mathfrak{S}_3(z-w\,|\,2\tau)+\mathfrak{S}_2(x-y\,|\,2\tau)\mathfrak{S}_2(z-w\,|\,2\tau),\\
\mathfrak{S}_3(x+y\,|\,2\tau)\mathfrak{S}_2(z+w\,|\,2\tau)+\mathfrak{S}_2(x+y\,|\,2\tau)\mathfrak{S}_3(z+w\,|\,2\tau),\\
\mathfrak{S}_3(x-y\,|\,2\tau)\mathfrak{S}_2(z-w\,|\,2\tau)+\mathfrak{S}_2(x-y\,|\,2\tau)\mathfrak{S}_3(z-w\,|\,2\tau)
\end{array}$$

Après une transformation algébrique facile, on voit qu'elle est égale au produit des deux premières augmenté du produit des deux dernières. Mais, en vertu des équations (LVIII_{2-3}) elles-mêmes, les quatre quantités que nous venons d'écrire sont respectivement égales à

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{S}_3\left(\dfrac{+x+y+z+w}{2}\right)\mathfrak{S}_3\left(\dfrac{-x+y+z-w}{2}\right),\\[2ex]
\mathfrak{S}_3\left(\dfrac{-x+y-z+w}{2}\right)\mathfrak{S}_3\left(\dfrac{+x+y-z-w}{2}\right),\\[2ex]
\mathfrak{S}_2\left(\dfrac{+x+y+z+w}{2}\right)\mathfrak{S}_2\left(\dfrac{-x+y+z-w}{2}\right),\\[2ex]
\mathfrak{S}_2\left(\dfrac{-x+y-z+w}{2}\right)\mathfrak{S}_2\left(\dfrac{+x+y-z-w}{2}\right).
\end{array}$$

On obtient donc bien ainsi l'identité de Jacobi.

CHAPITRE IV.

LES QUOTIENTS DES FONCTIONS σ ET DES FONCTIONS $\mathfrak{S}$

I — Les fonctions ξ

287 Il convient souvent, dans diverses questions, d'introduire les quotients que l'on peut former au moyen de deux fonctions σ portant sur la même variable et les mêmes périodes; les quatre fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ engendrent ainsi douze fonctions. Nous poserons, en conservant les mêmes conventions qu'au n° 112 relatives aux indices α, β, γ,

$$(\text{LIX}_1)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_{\alpha 0} u &= \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_\alpha}, \\ \xi_{0\alpha} u &= \frac{\sigma u}{\sigma_\alpha u} = \frac{1}{\sqrt{pu - e_\alpha}}, \\ \xi_{\beta\gamma} u &= \frac{\sigma_\beta u}{\sigma_\gamma u} = \frac{\sqrt{pu - e_\beta}}{\sqrt{pu - e_\gamma}}. \end{aligned}\right.$$

Nous sous-entendrons la variable u quand il n'y aura aucune ambiguïté à craindre; ainsi nous écrirons $\xi_{\alpha 0}$, $\xi_{0\alpha}$, $\xi_{\beta\gamma}$ au lieu de $\xi_{\alpha 0} u$, $\xi_{0\alpha} u$, $\xi_{\beta\gamma} u$. Au contraire, quand il y aura lieu de rappeler les nombres ω_1, ω_3 qui servent à construire les fonctions σ et, par suite, les fonctions ξ, nous écrirons

$$\xi_{\alpha 0}(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad \xi_{0\alpha}(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad \xi_{\beta\gamma}(u \mid \omega_1, \omega_3),$$

ou bien

$$\xi_{\alpha 0}(u, g_2, g_3), \quad \xi_{0\alpha}(u, g_2, g_3), \quad \xi_{\beta\gamma}(u; g_2, g_3),$$

si c'est sur les invariants g_2, g_3 qu'on veut attirer l'attention.

288. Les fonctions ξ sont des fonctions univoques de u; celles

qui ne contiennent pas d'indice o sont paires, les autres sont impaires. Elles n'admettent pas d'autres singularités que des pôles, tous simples; ces pôles sont les nombres congrus à o, *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$, si le second indice est o, à ω_α si le second indice est α Les zéros de ces fonctions sont congrus à o ou à ω_α, selon que le premier indice est o ou α, ce sont tous des zéros simples.

D'après leur définition, les fonctions ξ sont des fonctions algébriques de la seule fonction pu, elles sont donc toutes des fonctions algébriques de l'une quelconque d'entre elles, tandis que leurs carrés sont des fonctions rationnelles du carré de l'une quelconque d'entre elles. D'ailleurs les relations algébriques qui les lient sont manifestes; il suffit de les écrire

$$(\text{LIX})\quad \begin{cases} (2)\quad \xi_{\alpha 0}=\dfrac{1}{\xi_{0\alpha}}, \qquad \xi_{\beta\gamma}=\dfrac{\xi_{\beta 0}}{\xi_{\gamma 0}}=\dfrac{\xi_{\beta\alpha}}{\xi_{\gamma\alpha}}=\xi_{\beta 0}\xi_{0\gamma}=\xi_{\beta\alpha}\xi_{\alpha\gamma}, \\ (3)\quad pu=e_\alpha+\xi_{\alpha 0}^2=e_\beta+\xi_{\beta 0}^2=e_\gamma+\xi_{\gamma 0}^2, \end{cases}$$

d'où

$$(\text{LIX})\quad \begin{cases} (4)\quad 3pu=\xi_{\alpha 0}^2+\xi_{\beta 0}^2+\xi_{\gamma 0}^2, \\ (5)\quad pu=e_\alpha+\dfrac{e_\gamma-e_\alpha}{1-\xi_{\gamma\alpha}^2}=e_\beta+\dfrac{e_\alpha-e_\beta}{1-\xi_{\alpha\beta}^2}=e_\gamma+\dfrac{e_\beta-e_\gamma}{1-\xi_{\beta\gamma}^2}. \end{cases}$$

Notons encore celle-ci

$$(\text{LIX}_6)\qquad \frac{1}{pu-e_\gamma}=\xi_{0\gamma}^2=\frac{1-\xi_{\beta\gamma}^2}{e_\beta-e_\gamma}=\frac{1-\xi_{\alpha\gamma}^2}{e_\alpha-e_\gamma}.$$

289. Il est très aisé, au moyen des diverses formules (XII_{2-3}), de voir quel changement produit sur les fonctions $\xi_{\alpha 0}$, $\xi_{\beta\gamma}$ l'addition de l'une des quantités $2\omega_\alpha$, $2\omega_\beta$, $2\omega_\gamma$ ou ω_α, ω_β, ω_γ à l'argument u.

Observons d'abord que l'on a

$$(\text{LX}_1)\qquad \begin{cases} \xi_{\alpha 0}\,\omega_\beta=\sqrt{e_\beta-e_\alpha}, \\ \xi_{\beta\gamma}\,\omega_\alpha=\dfrac{\sqrt{e_\alpha-e_\beta}}{\sqrt{e_\alpha-e_\gamma}}=-\dfrac{\sqrt{e_\beta-e_\alpha}}{\sqrt{e_\gamma-e_\alpha}}, \end{cases}$$

la dernière égalité résulte des formules (XIII_2).

En particulier, et en tenant compte des formules (XXXVII_{4-5}),

on a

$$(\text{LX}_2)\qquad k = \xi_{21}\,\omega_3, \qquad k' = \xi_{23}\,\omega_1.$$

Maintenant les formules (XII_{2-3}) donnent

$$(\text{LX}_3)\qquad \begin{cases} \xi_{\alpha 0}(u+2\omega_\alpha) = \xi_{\alpha 0}\,u, & \xi_{\beta\gamma}(u+2\omega_\alpha) = \xi_{\beta\gamma}\,u, \\ \xi_{\alpha 0}(u+2\omega_\beta) = -\xi_{\alpha 0}\,u, & \xi_{\beta\gamma}(u+2\omega_\beta) = -\xi_{\beta\gamma}\,u \end{cases}$$

$$(\text{LX}_4)\qquad \begin{cases} \xi_{\alpha 0}(u+\omega_\alpha) = -\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\,\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}\,\xi_{0\alpha}\,u \\ \qquad\qquad = -\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\sqrt{e_\gamma - e_\alpha}\,\xi_{0\alpha}\,u, \\ \xi_{\alpha 0}(u+\omega_\beta) = \sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\xi_{\gamma\beta}\,u, \\ \xi_{\beta\gamma}(u+\omega_\alpha) = \dfrac{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}}\,\xi_{\gamma\beta}\,u = -\dfrac{\sqrt{e_\beta - e_\alpha}}{\sqrt{e_\gamma - e_\alpha}}\,\xi_{\gamma\beta}\,u, \\ \xi_{\beta\gamma}(u+\omega_\beta) = -\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\xi_{0\alpha}\,u. \end{cases}$$

Ces formules montrent que les fonctions ξ sont doublement périodiques. La fonction $\xi_{10}u$, par exemple, admet les périodes $2\omega_1$, $4\omega_3$, et il est clair, d'après la nature des pôles qui sont tous congrus à zéro, *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$, et parce que $2\omega_3$ n'est manifestement pas une période, que ces périodes sont *primitives*. Les carrés des fonctions ξ sont doublement périodiques et admettent tous $2\omega_1$, $2\omega_3$ comme couple de périodes primitives.

290. Il est facile d'obtenir les équations différentielles que vérifient les fonctions ξ, puisque l'on a l'équation qui relie $\wp u$ à $\wp' u$.

Observons d'abord que l'équation (XI_3)

$$\wp' u = -2\,\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$$

peut s'écrire maintenant

$$\wp' u = -2\xi_{\alpha 0}\xi_{\beta 0}\xi_{\gamma 0} = -2\sqrt{\wp u - e_\alpha}\,\sqrt{\wp u - e_\beta}\,\sqrt{\wp u - e_\gamma}$$

Dès lors les relations

$$\xi_{\alpha 0} = \sqrt{\wp u - e_\alpha}, \qquad \xi_{0\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_\alpha}}, \qquad \xi_{\beta\gamma} = \frac{\sqrt{\wp u - e_\beta}}{\sqrt{\wp u - e_\gamma}}$$

donnent immédiatement

$$(\text{LXI}_1)\qquad \xi'_{\alpha 0} = \frac{p'u}{2\sqrt{pu-e_\alpha}} = -\sqrt{pu-e_\beta}\sqrt{pu-e_\gamma} = -\xi_{\beta 0}\xi_{\gamma 0},$$

$$(\text{LXI}_2)\qquad \xi'_{0\alpha} = \frac{-p'u}{2\sqrt{pu-e_\alpha}(pu-e_\alpha)} = \frac{\sqrt{pu-e_\beta}\sqrt{pu-e_\gamma}}{pu-e_\alpha} = \xi_{\beta\alpha}\xi_{\gamma\alpha},$$

$$(\text{LXI}_3)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi'_{\beta\gamma} &= \frac{(e_\beta-e_\gamma)\,p'u}{2\sqrt{pu-e_\beta}\sqrt{pu-e_\gamma}(pu-e_\gamma)} \\ &= \frac{-(e_\beta-e_\gamma)\sqrt{pu-e_\alpha}}{pu-e_\gamma} = -(e_\beta-e_\gamma)\,\xi_{0\gamma}\xi_{\alpha\gamma}. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant dans la première de ces égalités $\xi_{\beta 0}$, $\xi_{\gamma 0}$ par leurs valeurs (LIX_3) en fonction de $\xi_{\alpha 0}$, on obtient

$$(\text{LXII}_1)\qquad \xi'^2_{\alpha 0} = (e_\alpha-e_\beta+\xi^2_{\alpha 0})(e_\alpha-e_\gamma+\xi^2_{\alpha 0}),$$

c'est-à-dire que la fonction $\xi_{\alpha 0}$ vérifie l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (e_\alpha-e_\beta+y^2)(e_\alpha-e_\gamma+y^2);$$

elle peut donc être définie comme une fonction univoque de u satisfaisant à cette équation différentielle et telle que la différence $y-\frac{1}{u}$ soit régulière aux environs du point o, et s'annule en ce point.

Il est clair que, si une fonction $f(u)$ satisfait à une pareille équation différentielle, où la variable u ne figure pas explicitement, il en sera de même de la fonction $f(u+C)$, où C est une constante arbitraire; les fonctions $\xi_{\alpha 0}(u+\omega_\alpha)$, $\xi_{\alpha 0}(u+\omega_\beta)$, $\xi_{\alpha 0}(u+\omega_\gamma)$, en particulier, devront vérifier cette équation différentielle, ainsi que les fonctions

$$-\sqrt{e_\alpha-e_\beta}\sqrt{e_\alpha-e_\gamma}\,\xi_{0\alpha}u,\quad \sqrt{e_\beta-e_\alpha}\,\xi_{\gamma\beta}u,\quad \sqrt{e_\gamma-e_\alpha}\,\xi_{\beta\gamma}u,$$

qui leur sont respectivement égales, on en conclut, ou l'on obtient directement par un calcul analogue au précédent, les équations

$$(\text{LXII})\qquad \left\{\begin{aligned} &(2)\quad \xi'^2_{0\alpha} = [1+(e_\alpha-e_\beta)\xi^2_{0\alpha}][1+(e_\alpha-e_\gamma)\xi^2_{0\alpha}], \\ &(3)\quad \xi'^2_{\beta\gamma} = (1-\xi^2_{\beta\gamma})[e_\beta-e_\alpha+(e_\alpha-e_\gamma)\xi^2_{\beta\gamma}] \end{aligned}\right.$$

291. Remarquons encore les formules, d'un usage fréquent

dans le Calcul intégral, qui lient les fonctions ξ aux fonctions ζ, savoir

$$(\text{LXIII})\left\{\begin{array}{ll}(1) & \xi^2_{\alpha 0}(u) = pu - e_\alpha = -\zeta' u - e_\alpha,\\ (2) & -\zeta'_\alpha u = p(u+\omega_\alpha) = e_\alpha + \dfrac{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}{pu - e_\alpha},\end{array}\right.$$

d'où

$$(\text{LXIII})\left\{\begin{array}{ll}(3) & -\zeta'_\alpha u - e_\alpha = (e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)\,\xi^2_{0\alpha}(u),\\ (4) & -\zeta'_\beta u - e_\alpha = (e_\beta - e_\alpha)\,\xi^2_{\gamma\beta}(u),\end{array}\right.$$

et

$$(\text{LXIII}_5)\left\{\begin{aligned}\zeta_\alpha u - \zeta u &= \frac{d}{du}\log \xi_{\alpha 0}(u) = \frac{p' u}{2(pu - e_\alpha)}\\ &= -\frac{\sqrt{pu - e_\beta}\sqrt{pu - e_\gamma}}{\sqrt{pu - e_\alpha}} = -\xi_{\beta 0}(u)\,\xi_{\gamma\alpha}(u) = -\frac{\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u}{\sigma u\,\sigma_\alpha u};\end{aligned}\right.$$

$$(\text{LXIII}_6)\left\{\begin{aligned}\zeta_\beta u - \zeta_\gamma u &= \frac{d}{du}\log \xi_{\beta\gamma}(u) = \frac{1}{2}\,\frac{(e_\beta - e_\gamma)\,p' u}{(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma)}\\ &= -\frac{(e_\beta - e_\gamma)\sqrt{pu - e_\alpha}}{\sqrt{pu - e_\beta}\sqrt{pu - e_\gamma}} = -(e_\beta - e_\gamma)\,\xi_{\alpha\beta}(u)\,\xi_{0\gamma}(u)\\ &= -(e_\beta - e_\gamma)\,\frac{\sigma_\alpha u\,\sigma u}{\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u}.\end{aligned}\right.$$

292. Les deux dernières relations peuvent s'écrire sous une forme un peu différente, qu'il ne sera peut-être pas inutile de faire connaître.

Reportons-nous aux formules (XXXIII_{5-6})

$$\sigma u = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta'_1(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2},$$

$$\sigma_\alpha u = \frac{\vartheta_{\alpha+1}(v)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2},$$

on en déduit, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\zeta u = \frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)} + 2\eta_1 v,$$

$$\zeta_\alpha u = \frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta'_{\alpha+1}(v)}{\vartheta_{\alpha+1}(v)} + 2\eta_1 v,$$

dès lors les formules (LXIII_{5-6}) peuvent s'écrire

$$\frac{1}{2\omega_1}\left[\frac{\mathfrak{S}_1'(v)}{\mathfrak{S}_1(v)}-\frac{\mathfrak{S}_{\alpha+1}'(v)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)}\right]=\frac{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)\,\mathfrak{S}_1'(0)\,\mathfrak{S}_{\beta+1}(v)\,\mathfrak{S}_{\gamma+1}(v)}{2\omega_1\,\mathfrak{S}_{\beta+1}(0)\,\mathfrak{S}_{\gamma+1}(0)\,\mathfrak{S}_1(v)\,\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)},$$

$$\frac{1}{2\omega_1}\left[\frac{\mathfrak{S}_{\gamma+1}'(v)}{\mathfrak{S}_{\gamma+1}(v)}-\frac{\mathfrak{S}_{\beta+1}'(v)}{\mathfrak{S}_{\beta+1}(v)}\right]=(e_\beta-e_\gamma)\frac{2\omega_1\mathfrak{S}_{\beta+1}(0)\mathfrak{S}_{\gamma+1}(0)\mathfrak{S}_1(v)\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)}{\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)\,\mathfrak{S}_1'(0)\,\mathfrak{S}_{\beta+1}(v)\,\mathfrak{S}_{\gamma+1}(v)};$$

en utilisant les relations (XXXVI_{4-5}) écrites sous la forme

$$e_\beta-e_\gamma=\frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\mathfrak{S}_{\alpha+1}^4(0),\qquad \beta>\gamma,$$

$$\mathfrak{S}_1'(0)=\pi\mathfrak{S}_{\alpha+1}(0)\,\mathfrak{S}_{\beta+1}(0)\,\mathfrak{S}_{\gamma+1}(0),$$

on trouve, après quelques réductions immédiates,

$$(\mathrm{LXIII})\quad\begin{cases}(7)\quad \mathfrak{S}_1'(v)\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)-\mathfrak{S}_1(v)\mathfrak{S}_{\alpha+1}'(v)=\pi\mathfrak{S}_{\alpha+1}^2(0)\mathfrak{S}_{\beta+1}(v)\mathfrak{S}_{\gamma+1}(v),\\(8)\quad \mathfrak{S}_{\gamma+1}'(v)\mathfrak{S}_{\beta+1}(v)-\mathfrak{S}_{\gamma+1}(v)\mathfrak{S}_{\beta+1}'(v)=\pi\mathfrak{S}_{\alpha+1}^2(0)\mathfrak{S}_1(v)\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v).\end{cases}$$

C'est là les formules que nous avions en vue

293. Les formules (XV) nous montrent immédiatement que les fonctions ξ de $u+a$ peuvent s'exprimer rationnellement au moyen des fonctions ξ de u et de a Il suffit pour avoir les formules qui fournissent ces expressions de diviser membre à membre deux des formules (XV) choisies de façon que dans les premiers membres figure un facteur commun. Ces expressions pourront d'ailleurs être transformées de diverses façons, grâce aux relations qui existent entre les fonctions ξ.

Si, par exemple, nous choisissons, d'une part, les équations (XV_{4-5}) mises sous la forme

$$\begin{aligned}&\sigma(u+a)\,\sigma_\gamma(u-a)\\&\quad=\sigma_\gamma^2 u\,\sigma_\gamma^2 a\,[\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}a\,\xi_{\beta\gamma}a+\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}u],\\&\sigma_\beta(u+a)\,\sigma_\gamma(u-a)\\&\quad=\sigma_\gamma^2 u\,\sigma_\gamma^2 a\,[\xi_{\beta\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}a-(e_\beta-e_\gamma)\,\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}a],\end{aligned}$$

et, d'autre part, l'équation (XV_2) mise sous la forme

$$\sigma_\gamma(u+a)\,\sigma_\gamma(u-a)=\sigma_\gamma^2 u\,\sigma_\gamma^2 a\,[1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2 u\,\xi_{0\gamma}^2 a],$$

on trouvera, en divisant respectivement, membre à membre, les

deux premières équations par la troisième,

$$(\text{LXIV}_1)\qquad \xi_{0\gamma}(u+a)=\frac{\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}a\,\xi_{\beta\gamma}a+\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}u}{1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2u\,\xi_{0\gamma}^2a},$$

$$(\text{LXIV}_3)\qquad \xi_{\beta\gamma}(u+a)=\frac{\xi_{\beta\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}a-(e_\beta-e_\gamma)\,\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}a}{1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2u\,\xi_{0\gamma}^2a}.$$

Les formules ont été disposées de manière que le second indice des fonctions qui y figurent soit toujours γ.

294 On aurait pu utiliser aussi la formule (XV_1)

$$\sigma(u+a)\,\sigma(u-a)=\sigma_\gamma^2u\,\sigma_\gamma^2a\,(\xi_{0\gamma}^2u-\xi_{0\gamma}^2a),$$

qui, jointe à la première des équations dont nous nous sommes servis, aurait fourni la relation

$$(\text{LXIV}_2)\qquad \xi_{\gamma 0}(u-a)=\frac{\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}a\,\xi_{\beta\gamma}a+\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}u}{\xi_{0\gamma}^2u-\xi_{0\gamma}^2a},$$

en changeant dans cette formule a en $-a$ et comparant à l'expression déjà obtenue pour $\xi_{0\gamma}(u+a)$, on en conclut l'identité

$$\begin{aligned}(\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}a\,\xi_{\beta\gamma}a+\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}u)(\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}a\,\xi_{\beta\gamma}a-\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}u)\\=(\xi_{0\gamma}^2u-\xi_{0\gamma}^2a)\,[1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2u\,\xi_{0\gamma}^2a],\end{aligned}$$

que le lecteur pourra vérifier au moyen des relations entre les carrés des fonctions ξ.

295. Si, maintenant, dans l'expression (LXIV_1) de $\xi_{0\gamma}(u+a)$, on change a en $-a$ et qu'on effectue le produit

$$\xi_{0\gamma}(u+a)\,\xi_{0\gamma}(u-a),$$

on trouvera, en vertu de l'identité précédente,

$$(\text{LXV}_1)\qquad \xi_{0\gamma}(u+a)\,\xi_{0\gamma}(u-a)=\frac{\xi_{0\gamma}^2u-\xi_{0\gamma}^2a}{1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2u\,\xi_{0\gamma}^2a}.$$

Si l'on récrit la même relation en s'arrangeant de façon que l'indice α remplace l'indice γ, puis que l'on remplace u par $u+\omega_\beta$, on trouvera de suite

$$(\text{LXV}_2)\qquad \xi_{\beta\gamma}(u+a)\,\xi_{\beta\gamma}(u-a)=\frac{\xi_{\beta\gamma}^2u+(e_\alpha-e_\beta)\dfrac{\xi_{0\gamma}^2a}{\xi_{\alpha\gamma}^2a}}{1+(e_\alpha-e_\gamma)\dfrac{\xi_{0\gamma}^2a}{\xi_{\alpha\gamma}^2a}\,\xi_{\beta\gamma}^2u}.$$

296. Signalons encore les relations

$$(\mathrm{LXV}_3)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A}[\xi_{0\gamma}(u+a)+\xi_{0\gamma}(u-a)] = 2\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}a\,\xi_{\beta\gamma}a,\\ &\mathfrak{A}[\xi_{0\gamma}(u+a)-\xi_{0\gamma}(u-a)] = 2\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}u,\\ &\mathfrak{A}[\xi_{\beta\gamma}(u+a)+\xi_{\beta\gamma}(u-a)] = 2\xi_{\beta\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}a,\\ &\mathfrak{A}[\xi_{\beta\gamma}(u+a)-\xi_{\beta\gamma}(u-a)] = -2(e_\beta-e_\gamma)\,\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}a, \end{aligned}\right.$$

où

$$\mathfrak{A} = 1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2u\,\xi_{0\gamma}^2a,$$

et dont la déduction est évidente. Ces formules permettraient sans peine de trouver toutes les relations qui existent entre deux nombres qui rendent égales, ou égales et de signes contraires, deux fonctions ξ ayant les mêmes systèmes d'indices.

297. Examinons maintenant, comme au n° 120, le cas où les nombres ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$ sont réels et positifs.

Si la variable u est réelle, toutes les fonctions ξ sont réelles, on en connaît le signe d'après les résultats du n° 120 et les formules

$$\xi'_{0\alpha} = -\xi_{\beta\alpha}\xi_{\gamma\alpha},\qquad \xi'_{\beta\gamma} = -(e_\beta-e_\gamma)\,\xi_{0\gamma}\xi_{\alpha\gamma}$$

permettent de reconnaître immédiatement si elles sont croissantes ou décroissantes; comme d'ailleurs on connaît les valeurs qu'elles prennent pour les multiples de ω_1 qui sont les seules valeurs réelles pour lesquelles les dérivées puissent s'annuler ou devenir infinies, on reconnaîtra sans aucune difficulté entre quelles limites les fonctions varient. Par exemple, la fonction ξ_{03} croît de o à $\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}$ quand u croît de o à ω_1, la formule (LXIII_1) montre que dans cet intervalle on a

$$\xi'_{03}(u) = \sqrt{[1-(e_2-e_3)\,\xi_{03}^2(u)]\,[1-(e_1-e_3)\,\xi_{03}^2(u)]},$$

en donnant au radical le sens arithmétique, puisque la dérivée doit être positive; on en conclut qu'on doit avoir

$$\omega_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}} \frac{dy}{\sqrt{[1-(e_2-e_3)y^2]\,[1-(e_1-e_3)y^2]}},$$

et, en remplaçant dans cette formule y par $\frac{x}{\sqrt{e_1 - e_3}}$, on trouve

$$\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

en donnant à k la même signification (XXXVII$_4$) qu'au n° 170,

$$\sqrt{k} = \frac{1}{i} \frac{\sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}.$$

298. Quand $u = iu'$ est purement imaginaire et que u' reste dans l'intervalle $\left(0, \frac{\omega_3}{i}\right)$, les fonctions paires $\xi_{\beta\gamma}(iu')$ sont réelles et positives, ainsi que la fonction impaire $\frac{1}{i}\xi_{0\alpha}(iu')$; les expressions des dérivées donnent aisément le sens de la variation, soit, par exemple,

$$z = \frac{1}{i} \xi_{01}(iu'),$$

on aura

$$\frac{dz}{du'} = \xi'_{01}(iu') = \xi_{21}(iu')\xi_{31}(iu'),$$

en désignant par $\xi'_{01}(iu')$ ce que devient $\xi'_{01} u$ quand on y remplace u par iu', $\frac{dz}{du'}$ est donc positif et z croît de 0 à

$$\frac{1}{i} \xi_{01} \omega_3 = \frac{1}{i\sqrt{e_3 - e_1}} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

comme on s'en convainc en se reportant aux formules (LX$_1$, XIII$_1$). Puisque la dérivée de z est positive, elle est donnée par la formule

$$\sqrt{[1 + (e_1 - e_2)\xi_{01}^2(iu')][1 + (e_1 - e_3)\xi_{01}^2(iu')]}$$
$$= \sqrt{[1 - (e_1 - e_2) z^2][1 - (e_1 - e_3) z^2]},$$

les radicaux étant pris avec le sens arithmétique, et l'on a par conséquent

$$\frac{\omega_3}{i} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}} \frac{dz}{\sqrt{[1 - (e_1 - e_2) z^2][1 - (e_1 - e_3) z^2]}},$$

ou, en remplaçant z par $\frac{x}{\sqrt{e_1 - e_3}}$,

$$\frac{\omega_3}{i}\sqrt{e_1 - e_3} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

ici encore k' a le même sens (XXXVII$_5$) qu'au n° 170, savoir :

$$\sqrt{k'} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}} = \frac{\mathfrak{S}_4(0)}{\mathfrak{S}_3(0)},$$

$\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ sont réels, positifs et plus petits que 1.

Les formules qui donnent, dans ce cas, ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$ au moyen de e_1, e_2, e_3 doivent naturellement être rapprochées de celles qui ont été obtenues au n° 297.

299. Ajoutons enfin quelques remarques relatives à l'homogénéité, que le lecteur rapprochera de celles qui ont été faites au n° 119. En reprenant pour un moment les notations de ce numéro, c'est-à-dire en posant

$$\omega_1' = \lambda\omega_1, \qquad \omega_3' = \lambda\omega_3,$$

on trouve de suite, à l'aide des formules (XVIII$_{2-3}$),

$$(\text{LXVI}) \quad \begin{cases} (1) \quad \xi_{0\alpha}(u \mid \omega_1', \omega_3') = \lambda\, \xi_{0\alpha}\left(\frac{u}{\lambda} \middle| \omega_1, \omega_3\right), \\ (2) \quad \xi_{\alpha 0}(u \mid \omega_1', \omega_3') = \frac{1}{\lambda}\, \xi_{\alpha 0}\left(\frac{u}{\lambda} \middle| \omega_1, \omega_3\right), \\ (3) \quad \xi_{\beta\gamma}(u \mid \omega_1', \omega_3') = \xi_{\beta\gamma}\left(\frac{u}{\lambda} \middle| \omega_1, \omega_3\right). \end{cases}$$

Il suit de là que, si l'on désigne par φ une fonction de ω_1, ω_3 qui soit, comme η_α ou $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$, homogène par rapport à ω_1, ω_3 et du degré -1, les fonctions

$$\varphi\xi_{0\alpha}\left(\frac{u}{\varphi} \middle| \omega_1, \omega_3\right), \quad \xi_{\beta\gamma}\left(\frac{u}{\varphi} \middle| \omega_1, \omega_3\right),$$

ne dépendront que de l'argument u d'une part, du rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ de l'autre ; en effet, si l'on pose

$$\lambda\varphi' = \lambda\varphi(\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \varphi(\omega_1, \omega_3),$$

on aura

$$\varphi'\xi_{0\alpha}\left(\frac{u}{\varphi'}\middle|\,\omega_1', \omega_3'\right) = \varphi\xi_{0\alpha}\left(\frac{u}{\varphi}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right),$$

$$\xi_{\beta\gamma}\left(\frac{u}{\varphi'}\middle|\,\omega_1', \omega_3'\right) = \xi_{\beta\gamma}\left(\frac{u}{\varphi}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right)$$

300. Trois de ces fonctions,

$$\varphi\xi_{0\alpha}\left(\frac{u}{\varphi}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right), \qquad \xi_{\beta\gamma}\left(\frac{u}{\varphi}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right),$$

dont le rôle a été et restera considérable dans la théorie des fonctions doublement périodiques et dans les applications de cette théorie, ont été introduites tout d'abord par Jacobi, qui les a nommées fonctions *elliptiques* de l'*argument* u et du *module* k, il les a désignées, pour des raisons que nous ferons connaître plus tard, par les notations

$$\sin\mathrm{am}(u, k), \quad \cos\mathrm{am}(u, k), \quad \Delta\mathrm{am}(u, k).$$

C'est l'etude de ces fonctions elliptiques, que nous désignerons (¹) par

$$\mathrm{sn}(u, k), \quad \mathrm{cn}(u, k), \quad \mathrm{dn}(u, k),$$

qui fera l'objet du paragraphe suivant

II — Les fonctions sn, cn, dn

301. Supposant que la partie réelle du rapport $\frac{\omega_3}{i\omega_1}$ soit positive et que, par conséquent, $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1$ soit égal à $\frac{\pi i}{2}$, nous poserons

$$(\text{LXVII})\quad \begin{cases} (1) \quad \mathrm{sn}(u, k) = \sqrt{e_1 - e_3}\,\xi_{03}\left(\dfrac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right), \\ (2) \quad \mathrm{cn}(u, k) = \xi_{13}\left(\dfrac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right), \\ (3) \quad \mathrm{dn}(u, k) = \xi_{23}\left(\dfrac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right) \end{cases}$$

(¹) La notation sn, cn, dn a été proposée par Gudermann Elle a été adoptée par un grand nombre d'auteurs, en particulier par M. Hermite, avec une légère différence sur laquelle nous insistons plus loin (n° 317)

Quand on ne veut pas mettre k en évidence, on écrit simplement $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, au lieu de $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$

Ces trois fonctions sont homogènes de degré zéro en ω_1, ω_3; elles ne dépendent donc (n° 299) que de l'argument u et du rapport $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$. Ce fait si important doit se manifester dans les relations algébriques et dans les équations différentielles que vérifient les quantités $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, équations que l'on déduit facilement de celles que vérifie la fonction ξ.

302. En désignant par $\operatorname{sn}' u$, $\operatorname{cn}' u$, $\operatorname{dn}' u$ les dérivées de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ par rapport à u, et par

$$\xi'_{03}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right), \quad \xi'_{13}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right), \quad \xi'_{23}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)$$

ce que deviennent les dérivées $\xi'_{03} u$, $\xi'_{13} u$, $\xi'_{23} u$ de $\xi_{03} u$, $\xi_{13} u$, $\xi_{23} u$ quand on y remplace u par $\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}$, et en tenant compte des relations

$$\xi'_{0\alpha} = \xi_{\beta\alpha}\xi_{\gamma\alpha}, \qquad \xi'_{\beta\gamma} = -(e_\beta - e_\gamma)\,\xi_{0\gamma}\xi_{\alpha\gamma},$$

on trouve immédiatement

$$(\text{LXVIII}) \left\{ \begin{aligned} &(1) \quad \operatorname{sn}' u = \xi'_{03}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \xi_{13}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)\xi_{23}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ &(2) \quad \operatorname{cn}' u = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\xi'_{13}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) \\ &\qquad = -\sqrt{e_1-e_3}\,\xi_{03}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)\xi_{23}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ &(3) \quad \operatorname{dn}' u = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\xi'_{23}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) \\ &\qquad = -\frac{e_2-e_3}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\xi_{03}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)\xi_{13}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs deux des relations (LIX_6), savoir

$$\xi_{03}^2 = \frac{1-\xi_{13}^2}{e_1-e_3} = \frac{1-\xi_{23}^2}{e_2-e_3},$$

donnent immédiatement

$$\frac{\operatorname{sn}^2 u}{e_1 - e_3} = \frac{1 - \operatorname{cn}^2 u}{e_1 - e_3} = \frac{1 - \operatorname{dn}^2 u}{e_2 - e_3};$$

on a donc

$$\text{(LXIX)} \qquad \begin{cases} (1) & \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \\ (2) & \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1, \end{cases}$$

et l'on voit, à cause de ces relations et de l'expression de la dérivée de $\operatorname{sn} u$, que $\operatorname{sn} u$ vérifie l'équation différentielle

$$\text{(LXX}_1\text{)} \qquad \operatorname{sn}'^2 u = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u).$$

On voit aussi que $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ vérifient les équations différentielles

$$\text{(LXX)} \qquad \begin{cases} (2) & \operatorname{cn}'^2 u = (1 - \operatorname{cn}^2 u)(1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u), \\ (3) & \operatorname{dn}'^2 u = (1 - \operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u - 1 + k^2) \end{cases}$$

Dans toutes ces relations ne figure que l'argument u et la quantité k qui ne dépend que de τ, comme on le voit sur la formule (XXXVII$_1$)

Nous entendrons toujours par *module* et *module complémentaire* des fonctions elliptiques $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ les quantités k et k'.

303. Si l'on tient compte des relations (LIX$_1$)

$$\xi_{03} u = \frac{1}{\sqrt{p u - e_3}}, \qquad \xi_{13} u = \frac{\sqrt{p u - e_1}}{\sqrt{p u - e_3}}, \qquad \xi_{23} u = \frac{\sqrt{p u - e_2}}{\sqrt{p u - e_3}},$$

on voit que les fonctions elliptiques sn, cn, dn sont liées à la fonction p par les relations

$$\text{(LXVII)} \qquad \begin{cases} (4) & \operatorname{sn}(u\sqrt{e_1 - e_3}, k) = \dfrac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{p u - e_3}}, \\ (5) & \operatorname{cn}(u\sqrt{e_1 - e_3}, k) = \dfrac{\sqrt{p u - e_1}}{\sqrt{p u - e_3}}, \\ (6) & \operatorname{dn}(u\sqrt{e_1 - e_3}, k) = \dfrac{\sqrt{p u - e_2}}{\sqrt{p u - e_3}}. \end{cases}$$

Les fonctions

$$\mathrm{sn}^2(u\sqrt{e_1-e_3}),\qquad \mathrm{cn}^2(u\sqrt{e_1-e_3}),\qquad \mathrm{dn}^2(u\sqrt{e_1-e_3})$$

sont donc des fonctions rationnelles et linéaires de la fonction pu, et l'on a en particulier

$$(\mathrm{LXVII}_7)\qquad pu = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2(u\sqrt{e_1-e_3})}.$$

304 En vertu de la définition même des fonctions $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$, on a

$$\mathrm{sn}\,0 = 0,\qquad \mathrm{cn}\,0 = 1,\qquad \mathrm{dn}\,0 = 1,$$

et par suite

$$\mathrm{sn}'0 = 1,\qquad \mathrm{cn}'0 = 0,\qquad \mathrm{dn}'0 = 0.$$

On peut donc définir $\mathrm{sn}(u,k)$ comme une fonction univoque de u qui s'annule pour $u=0$, dont la dérivée pour $u=0$ est positive et qui vérifie l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2).$$

On verra plus tard que, réciproquement, quand on se donne k, il existe une fonction univoque $\mathrm{sn}(u,k)$ vérifiant cette équation différentielle et satisfaisant aux conditions précédentes; puis des quantités ω_1, ω_3 dont le rapport seul $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ est déterminé, le coefficient de i dans ce rapport étant positif, telles enfin que, en construisant avec ces quantités les fonctions σ, ξ, la fonction $\mathrm{sn}(u,k)$ définie par l'équation différentielle soit précisément celle que définit de son côté l'équation

$$\mathrm{sn}\,u = \sqrt{e_1-e_3}\,\xi_{03}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right)$$

305. On connaît les valeurs de $\xi_{03}u$, $\xi_{13}u$, $\xi_{23}u$ pour $u=\omega_1$, $u=\omega_2$, $u=\omega_3$ et l'on sait ce que deviennent ces fonctions quand on augmente u de ω_1, ω_2, ω_3 Il est donc aisé d'avoir les valeurs des fonctions $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$, pour les valeurs de u égales à $\omega_1\sqrt{e_1-e_3}$, $\omega_2\sqrt{e_1-e_3}$, $\omega_3\sqrt{e_1-e_3}$ et ce qu'elles deviennent quand on augmente u de l'une ou de l'autre de ces quantités.

Il convient, pour nous rapprocher encore des notations de Jacobi, de poser

$$\text{(LXXI)} \qquad \begin{cases} (1) & \omega_1\sqrt{e_1-e_3} = \mathrm{K}, \\ (2) & \omega_3\sqrt{e_1-e_3} = i\mathrm{K}', \end{cases}$$

on en conclut, à cause des formules (XXXVI$_4$),

$$\text{(LXXI)} \qquad \begin{cases} (3) & \mathrm{K} = \frac{\pi}{2}\,\vartheta_3^2(0\mid\tau), \\ (4) & \mathrm{K}' = -\frac{\tau\pi i}{2}\,\vartheta_3^2(0\mid\tau), \end{cases}$$

de sorte que l'on peut envisager K et K′ comme étant des fonctions de τ; on voit d'ailleurs, sur ces formules, que la partie réelle du rapport $\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = \frac{\tau}{i}$ est toujours positive et que l'on a

$$\text{(LXXI}_5\text{)} \qquad q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}.$$

Nous n'emploierons pas de notation spéciale pour

$$\omega_2\sqrt{e_1-e_3} = -(\mathrm{K}+i\mathrm{K}').$$

Observons de suite que, si ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ sont réels et positifs, on a

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

en donnant aux radicaux le sens arithmétique

306. Avant d'écrire le Tableau qui donne les valeurs de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ pour les valeurs K, iK′, K + iK′, ou les formes que prennent ces fonctions quand on y remplace u par $u+\mathrm{K}$, $u+i\mathrm{K}'$, $u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, $u+2\mathrm{K}$, $u+2i\mathrm{K}'$, $u+2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'$, remarquons que les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ peuvent être définies au moyen des fonctions ϑ; il suffit, pour cela, de se reporter aux formules (XXXIII$_{5-6}$),

$$\sigma u = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1'(0)} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}, \qquad \sigma_\alpha u = \frac{\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}},$$

qui donnent immédiatement

$$\operatorname{sn} u = 2\omega_1\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\mathfrak{S}_4(0)}{\mathfrak{S}'_1(0)}\,\frac{\mathfrak{S}_1\left(\dfrac{u}{2\omega_1\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\dfrac{u}{2\omega_1\sqrt{e_1-e_3}}\right)},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\mathfrak{S}_4(0)}{\mathfrak{S}_2(0)}\,\frac{\mathfrak{S}_2\left(\dfrac{u}{2\omega_1\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\dfrac{u}{2\omega_1\sqrt{e_1-e_3}}\right)},$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\mathfrak{S}_4(0)}{\mathfrak{S}_3(0)}\,\frac{\mathfrak{S}_3\left(\dfrac{u}{2\omega_1\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\dfrac{u}{2\omega_1\sqrt{e_1-e_3}}\right)},$$

ou, en se reportant aux formules (XXXVI_5, XXXVII_{1-2}, LXXI_{1-3}),

$$(\text{LXXI})\quad\begin{cases}(6)\quad \operatorname{sn} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\,\dfrac{\mathfrak{S}_1\left(\dfrac{u}{2K}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\dfrac{u}{2K}\right)},\\[2ex] (7)\quad \operatorname{cn} u = \dfrac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\,\dfrac{\mathfrak{S}_2\left(\dfrac{u}{2K}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\dfrac{u}{2K}\right)},\\[2ex] (8)\quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'}\,\dfrac{\mathfrak{S}_3\left(\dfrac{u}{2K}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\dfrac{u}{2K}\right)}.\end{cases}$$

307 Ces formules mettent en évidence ce fait que les pôles des fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, qui sont tous simples, sont les zéros de la fonction $\mathfrak{S}_4\left(\dfrac{u}{2K}\right)$, c'est-à-dire les points

$$u = iK' + 2mK + 2niK',$$

m, n étant des nombres entiers, on voit de même que les zéros de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sont respectivement congrus aux nombres 0, K, $K + iK'$ (*modulis* $2K$, $2iK'$). Elles sont d'ailleurs aussi propres que les premières définitions à fournir le Tableau de formules que nous avions en vue, et qui résultent alors des formules (XXXIV),

on parvient ainsi aux résultats suivants

$$(\mathrm{LXXII}_1)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(-u, k) = -\operatorname{sn}(u, k), \\ \operatorname{cn}(-u, k) = \operatorname{cn}(u, k), \\ \operatorname{dn}(-u, k) = \operatorname{dn}(u, k) \end{cases}$$

$$(\mathrm{LXXII}_2)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u \end{cases}$$

$$(\mathrm{LXXII}_3)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + 2iK') = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 2iK') = -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2iK') = -\operatorname{dn} u. \end{cases}$$

$$(\mathrm{LXXII}_4)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + 2K + 2iK') = -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 2K + 2iK') = \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2K + 2iK') = -\operatorname{dn} u \end{cases}$$

$$(\mathrm{LXXII}_5)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + K) = \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{cn}(u + K) = -k' \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{dn}(u + K) = k' \dfrac{1}{\operatorname{dn} u}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{LXXII}_6)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + iK') = \dfrac{1}{k} \dfrac{1}{\operatorname{sn} u}, \\ \operatorname{cn}(u + iK') = -\dfrac{i}{k} \dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \\ \operatorname{dn}(u + iK') = -i \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{LXXII}_7)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + K + iK') = \dfrac{1}{k} \dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}, \\ \operatorname{cn}(u + K + iK') = -i \dfrac{k'}{k} \dfrac{1}{\operatorname{cn} u}, \\ \operatorname{dn}(u + K + iK') = ik' \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}. \end{cases}$$

Il résulte de là que $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sont des fonctions doublement périodiques admettant comme périodes primitives les nombres $4K$, $2iK'$; $4K$, $2K + 2iK'$, $2K$, $4iK'$ respectivement. Les carrés de ces fonctions admettent comme périodes primitives $2K$, $2iK'$.

308 En posant $u = 0$ dans les formules précédentes, on a immédiatement

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \quad \operatorname{sn} K = 1, \quad \operatorname{sn}(K + iK') = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{sn} iK' = \infty,$$

$$\operatorname{cn} 0 = 1, \quad \operatorname{cn} K = 0, \quad \operatorname{cn}(K + iK') = -i\frac{k'}{k}, \quad \operatorname{cn} iK' = \infty,$$

$$\operatorname{dn} 0 = 1, \quad \operatorname{dn} K = k', \quad \operatorname{dn}(K - iK') = 0, \quad \operatorname{dn} iK' = \infty,$$

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sn} 2K = 0, & \operatorname{sn}(2K + 2iK') = 0, & \operatorname{sn} 2iK' = 0, \\ \operatorname{cn} 2K = -1, & \operatorname{cn}(2K + 2iK') = 1, & \operatorname{cn} 2iK' = -1, \\ \operatorname{dn} 2K = 1, & \operatorname{dn}(2K + 2iK') = -1, & \operatorname{dn} 2iK' = -1 \end{array}$$

Ces formules montrent immédiatement que, dans le parallélogramme primitif 0, $4K$, $2iK'$, $4K + 2iK'$, les zéros de la fonction $\operatorname{sn} u$ sont 0, $2K$, et que ses pôles sont iK', $2K + iK'$; ces zéros et ces pôles sont simples. Ce fait est mis en évidence sur la *fig* 1 du Tableau de formules, où l'on a noté les valeurs de la fonction $z = \operatorname{sn}(u, k)$ aux points dont l'affixe u est $mK + niK'$, $\begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, 3, 4 \\ n = 0, 1, 2 \end{pmatrix}$.

Les *fig* 2 et 3 du Tableau de formules mettent de même en évidence les deux zéros et les deux pôles, tous simples, des fonctions $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ dans leurs premiers parallélogrammes ([1])

309 Les formules d'addition résultent immédiatement des formules établies pour les fonctions ξ Nous nous contentons de les écrire .

$$(\text{LXXIII}) \begin{cases} (1) \quad \operatorname{sn}(u + a) = \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}, \\[2ex] (2) \quad \operatorname{cn}(u + a) = \dfrac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} a - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}, \\[2ex] (3) \quad \operatorname{dn}(u + a) = \dfrac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}. \end{cases}$$

([1]) La *fig* 4 du Tableau de formules se rapporte à la fonction $\wp(u \mid \omega_1, \omega_3)$, elle met en évidence le fait que la somme des deux zéros de cette fonction situés dans le parallélogramme primitif 0, $2\omega_1$, $-2\omega_2$, $2\omega_3$, est égale à $-2\omega_2$, et que le point 0 est un pôle double de cette fonction

$$
(\text{LXXIV})\left\{\begin{array}{ll}
(1) & \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u-a)=\dfrac{\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 a},\\[2ex]
(2) & \operatorname{cn}(u+a)\operatorname{cn}(u-a)=\dfrac{\operatorname{cn}^2 a-\operatorname{dn}^2 a\operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 u},\\[2ex]
(3) & \operatorname{dn}(u+a)\operatorname{dn}(u-a)=\dfrac{\operatorname{dn}^2 a-k^2\operatorname{cn}^2 a\operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 u}.
\end{array}\right.
$$

$$
(\text{LXXIII})\left\{\begin{array}{ll}
(4) & \operatorname{sn}(u+a)+\operatorname{sn}(u-a)=\dfrac{2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 a},\\[2ex]
(5) & \operatorname{sn}(u+a)-\operatorname{sn}(u-a)=\dfrac{2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 a},\\[2ex]
(6) & \operatorname{cn}(u+a)+\operatorname{cn}(u-a)=\dfrac{2\operatorname{cn}u\operatorname{cn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 a},\\[2ex]
(7) & \operatorname{cn}(u+a)-\operatorname{cn}(u-a)=\dfrac{-2\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 a},\\[2ex]
(8) & \operatorname{dn}(u+a)+\operatorname{dn}(u-a)=\dfrac{2\operatorname{dn}u\operatorname{dn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 a},\\[2ex]
(9) & \operatorname{dn}(u+a)-\operatorname{dn}(u-a)=\dfrac{-2k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 a}.
\end{array}\right.
$$

310. Considérons, par exemple, la formule (LXXIII_5) : le premier membre est nul si la quantité $\operatorname{sn}a$ est nulle ou infinie, c'est-à-dire si l'on a

$$a = 2mK + m'iK',$$

en désignant par m et m' des entiers quelconques, ou si l'une des quantités $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$ est nulle, c'est-à-dire si l'on a

$$u = (2m+1)K + m'iK'.$$

Ce premier membre d'ailleurs ne peut être nul que dans l'un ou l'autre de ces cas

On conclut de là que *toutes* les solutions de l'équation

$$\operatorname{sn}x = \operatorname{sn}\alpha$$

sont données par les formules

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha + 4mK + 2m'iK',\\
x &= -\alpha + (4m+2)K + 2m'iK'
\end{aligned}
$$

On trouve de même que toutes les solutions de l'équation

$$\operatorname{cn}x = \operatorname{cn}\alpha$$

sont données par les formules

$$x = \pm \alpha + 4m\mathrm{K} + 4m' i \mathrm{K}',$$
$$x = \pm \alpha + (4m+2)\mathrm{K} + (4m'+2) i \mathrm{K}',$$

et que toutes les solutions de l'équation

$$\mathrm{dn}\, x = \mathrm{dn}\, \alpha$$

sont données par la formule

$$x = \pm \alpha + 2m\mathrm{K} + 4m' i \mathrm{K}'.$$

En particulier, les solutions des équations

$$\mathrm{sn}\, x = \pm 1, \qquad \mathrm{sn}\, x = \pm \frac{1}{k}, \qquad \mathrm{cn}\, x = \pm 1, \qquad \mathrm{dn}\, x = \pm 1$$

sont égales deux à deux.

311. Supposons ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ réels et positifs. Si l'on se reporte aux formules qui définissent k et k', en se rappelant (n° 121) que $\sqrt{e_2 - e_3}$ est un nombre négatif tandis que $\sqrt{e_1 - e_2}$, $\sqrt{e_1 - e_3}$ sont des nombres positifs, on voit que k et k' sont positifs, plus petits que 1; K et K′ exprimés au moyen de k^2, k'^2 par les formules

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

sont réels et positifs.

Si u est une variable réelle, les formules qui donnent $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$, sous forme de quotients de $\mathfrak{S}$ montrent que ces fonctions sont réelles Si u reste compris entre 0 et K, aucune des dérivées ne peut changer de signe : les fonctions varient donc toujours dans le même sens; $\mathrm{sn}\, u$ croît de 0 à 1, $\mathrm{cn}\, u$ décroît de 1 à 0, $\mathrm{dn}\, u$ de 1 à k'. Il convient de remarquer que la fonction $\mathrm{dn}\, u$, qui ne s'annule et ne devient infinie pour aucune valeur réelle de u, reste positive pour toutes les valeurs réelles de u De même, quand u croît de K à 2K, les dérivées ne peuvent encore

changer de signe, $\operatorname{sn} u$ décroît de 1 à 0, $\operatorname{cn} u$ décroît de 0 à -1, $\operatorname{dn} u$ croît de k' à 1

Ensuite les formules relatives à l'addition de $2K$ montrent comment les choses se passent dans l'intervalle $(2K, 4K)$.

312 Lorsque $u = iu'$ est purement imaginaire, $\frac{1}{i}\operatorname{sn}(iu')$ est une fonction réelle de u' ainsi que $\operatorname{cn}(iu')$ et $\operatorname{dn}(iu')$ Les dérivées par rapport à u' de ces fonctions sont respectivement

$$\operatorname{cn}(iu')\operatorname{dn}(iu'), \quad \frac{1}{i}\operatorname{sn}(iu')\operatorname{dn}(iu'), \quad \frac{1}{i}k^2\operatorname{sn}(iu')\operatorname{cn}(iu'),$$

elles ne changent pas de signe quand u' croît de 0 à K', dans cet intervalle $\frac{1}{i}\operatorname{sn}(iu')$, $\operatorname{cn}(iu')$ et $\operatorname{dn}(iu')$ ne peuvent prendre que des valeurs positives puisque ces fonctions sont positives pour $u' = 0$ et ne peuvent changer de signe, on voit donc que $\frac{1}{i}\operatorname{sn}(iu')$ croît de 0 à $+\infty$, et que $\operatorname{cn}(iu')$ et $\operatorname{dn}(iu')$ croissent de 1 à $+\infty$. D'ailleurs, quand u' tend vers K', le quotient $\frac{\operatorname{dn}(iu')}{\operatorname{cn}(iu')}$ tend vers k, puisque son carré $\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2(iu')}{1-\operatorname{sn}^2(iu')}$ tend vers k^2 et que $\frac{\operatorname{dn}(iu')}{\operatorname{cn}(iu')}$ reste réel et positif

Lorsque u' croît de K' à $2K'$, $\frac{\operatorname{sn}(iu')}{i}$, $\operatorname{cn}(iu')$, $\operatorname{dn}(iu')$ croissent de $-\infty$ à 0, -1 et -1 respectivement.

313 Enfin la formule

$$\operatorname{sn}(a+bi) - \operatorname{sn}(a-bi) = \frac{2\operatorname{sn}(bi)\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(bi)},$$

où a et b sont supposés réels et où le dénominateur du second membre est par conséquent réel, montre que $\operatorname{sn}(a+bi)$ ne peut être réel que si b est un multiple de K' ou si a est un multiple impair de K. Si b est un multiple pair de K', en effet, le facteur $\operatorname{sn}(bi)$ est nul; si b est un multiple impair de K', $\operatorname{sn}^2(bi)$ qui figure au dénominateur est infini et le second membre est encore nul; si enfin a est un multiple impair de K, $\operatorname{cn} a$ est nul.

D'ailleurs, dans ces différents cas, $\operatorname{sn}(a+bi)$ est réel En particulier, on voit que $\operatorname{sn} u$ est réel quand le point u va en ligne droite de 0 à K, de K à $K+iK'$, de $K+iK'$ à iK'. Le point u décrit alors trois côtés d'un rectangle, pour le premier côté $\operatorname{sn} u$ croît

de o à 1, pour le second de 1 à $\frac{1}{k}$, pour le troisième de $\frac{1}{k}$ à $+\infty$ Enfin, si $\operatorname{sn} u$ est réel et positif, les formules du n° 310 donnent toutes les valeurs de u, en y supposant que α soit représenté par l'un des points de la ligne brisée précédente.

De même pour les valeurs réelles et négatives de $i \operatorname{sn} u$ et le quatrième côté du précédent rectangle.

Les autres fonctions $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ donneraient lieu à des observations analogues que le lecteur n'aura aucune peine à faire de lui-même.

314. Les fonctions $\mathfrak{S}$ et leurs quotients ont été envisagés par plusieurs géomètres, elles se présentent souvent sous d'autres formes qu'il nous reste encore à faire connaître.

Comme l'a fait observer Kronecker dans ses Cours et dans plusieurs de ses Mémoires, la fonction doublement périodique

$$\frac{\mathfrak{S}_1(v \mid \tau)}{\mathfrak{S}_4(v \mid \tau)}$$

s'introduit d'elle-même dans quelques questions importantes d'Arithmétique et d'Algèbre.

Kronecker désigne par *fonction elliptique* El, la fonction de deux variables v et τ,

$$\text{(LXXV}_1) \qquad \operatorname{El}(v, \tau) = \frac{\mathfrak{S}_1(2v \mid 2\tau)}{\mathfrak{S}_4(2v \mid 2\tau)}.$$

En tenant compte des formules (XXXIII$_{0,12}$), (XL$_2$), (XXXVII$_4$), on voit que cette fonction est liée aux fonctions doublement périodiques précédemment définies, par les relations

$$\text{(LXXV}_2) \qquad \operatorname{El}\left(v, \frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{i} \sqrt[4]{e_2 - e_3} \sqrt[4]{e_1 - e_3}\, \xi_{03}(2u \mid \tau),$$

$$\text{(LXXV}_3) \qquad \begin{cases} \operatorname{El}\left(v, \frac{\tau}{2}\right) = \sqrt{k} \operatorname{sn}(4Kv, k), \\ \operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{El}\left(\frac{u}{4K}, \frac{\tau}{2}\right). \end{cases}$$

Pour les valeurs particulières o, $\frac{1}{4}$, $\frac{1+\tau}{4}$, $\frac{\tau}{4}$ de l'argument v, on

a immédiatement

$$(\text{LXXV}_4)\quad \begin{cases} \text{El}\left(0, \dfrac{\tau}{2}\right) = 0, & \text{El}\left(\dfrac{\tau}{4}, \dfrac{\tau}{2}\right) = \infty, \\ \text{El}\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{\tau}{2}\right) = \sqrt{k}, & \text{El}\left(\dfrac{1+\tau}{4}, \dfrac{\tau}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}. \end{cases}$$

Les deux relations

$$\text{El}\left(\frac{\nu+m+n\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\mathfrak{S}_1(\nu+m+n\tau)}{\mathfrak{S}_4(\nu+m+n\tau)}$$
$$= (-1)^m \frac{\mathfrak{S}_1(\nu)}{\mathfrak{S}_4(\nu)} = (-1)^m \,\text{El}\left(\frac{\nu}{2}\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right),$$

$$\text{El}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\tau}{4}, \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\mathfrak{S}_1\left(\nu+\dfrac{\tau}{2}\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\nu+\dfrac{\tau}{2}\right)} = \frac{\mathfrak{S}_4(\nu)}{\mathfrak{S}_1(\nu)} = \frac{1}{\text{El}\left(\dfrac{\nu}{2}, \dfrac{\tau}{2}\right)},$$

où m, n sont deux entiers quelconques, se déduisent sans peine des formules (XXXIV) En supposant m pair et en remplaçant ν, m, τ par 2ν, $2m$, 2τ, on obtient les relations

$$(\text{LXXV})\quad \begin{cases} (5)\quad \text{El}(\nu+m+n\tau, \tau) = \text{El}(\nu, \tau), \\ (6)\quad \text{El}\left(\nu+\dfrac{\tau}{2}, \tau\right) = \dfrac{1}{\text{El}(\nu, \tau)}, \end{cases}$$

dont la première met bien en évidence la double périodicité de la fonction El

En remplaçant $\text{sn}(u, k)$ par sa valeur

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\,\text{El}\left(\frac{u}{4k}, \frac{\tau}{2}\right),$$

on peut mettre la relation

$$\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u = \frac{d\,\text{sn}\,u}{du} = \sqrt{(1-\text{sn}^2 u)(1-k^2\,\text{sn}^2 u)}$$

sous la forme

$$\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u = \frac{1}{4\sqrt{k}\text{K}}\,\frac{d\text{El}\left(\nu, \dfrac{\tau}{2}\right)}{d\nu} = \sqrt{1-\rho\,\text{El}^2\left(\nu, \frac{\tau}{2}\right)+\text{El}^4\left(\nu, \frac{\tau}{2}\right)},$$

où l'on a posé [1] avec Jacobi

$$\rho = k + \frac{1}{k}; \tag{LXXV$_7$}$$

la formule d'addition de la fonction elliptique $\mathrm{El}\left(v, \frac{\tau}{2}\right)$ s'en déduit facilement : si x, y, z désignent les trois fonctions

$$x = \mathrm{El}\left(v, \frac{\tau}{2}\right), \qquad y = \mathrm{El}\left(w, \frac{\tau}{2}\right), \qquad z = \mathrm{El}\left(v + w, \frac{\tau}{2}\right),$$

on a

$$z = \frac{x\sqrt{1 - \rho y^2 + y^4} + y\sqrt{1 - \rho x^2 + x^4}}{1 - x^2 y^2}. \tag{LXXV$_8$}$$

315. En terminant ce paragraphe, indiquons, relativement aux fonctions $\mathfrak{I}$, d'autres notations qui ont un grand intérêt historique, qui sont souvent commodes, et dont nous aurons à faire usage.

En conservant aux quantités K et K' la signification donnée par les formules (LXXI_{3-4}), posons

$$(\mathrm{LXXVI})\quad \begin{cases} (1) & \mathrm{H}(x) = \mathfrak{I}_1\left(\dfrac{x}{2\mathrm{K}}\right), \\ (2) & \Theta(x) = \mathfrak{I}_4\left(\dfrac{x}{2\mathrm{K}}\right), \\ (3) & \mathrm{H}_1(x) = \mathfrak{I}_2\left(\dfrac{x}{2\mathrm{K}}\right), \\ (4) & \Theta_1(x) = \mathfrak{I}_3\left(\dfrac{x}{2\mathrm{K}}\right). \end{cases}$$

Les fonctions $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ s'expriment très simplement au moyen des fonctions $\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$, $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$ du même argument x. On a

$$(\mathrm{LXXVI})\quad \begin{cases} (5) & \mathrm{sn}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\dfrac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}, \\ (6) & \mathrm{cn}\,x = \dfrac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}, \\ (7) & \mathrm{dn}\,x = \sqrt{k'}\dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} \end{cases}$$

Les fonctions $\mathrm{H}(x)$, $\Theta(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$, $\Theta_1(x)$ jouissent des pro-

---

[1] *Œuvres*, t. I, p. 266.

priétés suivantes, qu'on déduit immédiatement des formules (XXXIV)

$$
(\mathrm{LXXVII}_1)\quad \begin{cases} \mathrm{H}(x+2m\mathrm{K}) = (-1)^m \mathrm{H}(x), \\ \Theta(x+2m\mathrm{K}) = \Theta(x), \\ \mathrm{H}_1(x+2m\mathrm{K}) = (-1)^m \mathrm{H}_1(x), \\ \Theta_1(x+2m\mathrm{K}) = \Theta_1(x), \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{LXXVII}_2)\quad \begin{cases} \mathrm{H}(x+2mi\mathrm{K}') = (-1)^m \mathrm{A}\,\mathrm{H}(x), \\ \Theta(x+2mi\mathrm{K}') = (-1)^m \mathrm{A}\,\Theta(x), \\ \mathrm{H}_1(x+2mi\mathrm{K}') = \mathrm{A}\,\mathrm{H}_1(x), \\ \Theta_1(x+2mi\mathrm{K}') = \mathrm{A}\,\Theta_1(x), \\ \mathrm{A} = e^{m^2\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} - m\pi\frac{ix}{\mathrm{K}}}, \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{LXXVII}_3)\quad \begin{cases} \mathrm{H}(x+\mathrm{K}) = \mathrm{H}_1(x), \\ \Theta(x+\mathrm{K}) = \Theta_1(x), \\ \mathrm{H}_1(x+\mathrm{K}) = -\mathrm{H}(x), \\ \Theta_1(x+\mathrm{K}) = \Theta(x), \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{LXXVII}_4)\quad \begin{cases} \mathrm{H}(x+i\mathrm{K}') = i\mathrm{B}\,\Theta(x), \\ \Theta(x+i\mathrm{K}') = i\mathrm{B}\,\mathrm{H}(x), \\ \mathrm{H}_1(x+i\mathrm{K}') = \mathrm{B}\,\Theta(x), \\ \Theta_1(x+i\mathrm{K}') = \mathrm{B}\,\mathrm{H}_1(x), \\ \mathrm{B} = e^{\frac{\pi}{4}\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} - \frac{\pi}{2}\frac{ix}{\mathrm{K}}}, \end{cases}
$$

m étant un entier quelconque.

316. En se reportant aux formules (XXXIII_{7-8}), on a immédiatement, en remplaçant la lettre u par la lettre x,

$$
(\mathrm{LXXVIII})\quad \begin{cases} (1)\quad \zeta\left(\frac{x}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \frac{\eta_1 x}{\mathrm{K}} + \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}, \\ (2)\quad \zeta_1\left(\frac{x}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \frac{\eta_1 x}{\mathrm{K}} + \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\mathrm{H}_1'(x)}{\mathrm{H}_1(x)}, \\ (3)\quad \zeta_2\left(\frac{x}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \frac{\eta_1 x}{\mathrm{K}} + \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}, \\ (4)\quad \zeta_3\left(\frac{x}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \frac{\eta_1 x}{\mathrm{K}} + \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}. \end{cases}
$$

Nous poserons aussi

$$
(\mathrm{LXXIX}_1)\quad \mathrm{Z}(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)};
$$

on a alors immédiatement les relations

$$(\text{LXXIX}_2) \qquad Z(x+2K) = Z(x),$$

$$(\text{LXXIX}_3) \qquad Z(x+2iK') = Z(x) - \frac{i\pi}{K}.$$

317. C'est ici qu'il convient peut-être d'expliquer la différence entre les notations que nous adoptons et celles de M. Hermite

Dans la plupart des Mémoires de l'illustre auteur et, en particulier, dans son *Cours autographié de la Faculté des Sciences*, K et K′ désignent des quantités quelconques assujetties seulement à ce que la partie réelle du rapport $\frac{K'}{K}$ soit positive; il pose alors [1]

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

$$H(x) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{3\pi x}{2K} - \ldots,$$

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots,$$

$$H_1(x) = 2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos\frac{5\pi x}{2K} + \ldots,$$

$$\Theta_1(x) = 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} + 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots$$

Les quantités K et K′ de M. Hermite étant quelconques, on peut, sans inconvénient, les identifier avec celles que nous désignons par ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$; si l'on adopte cette convention, les fonctions $H(x)$, $\Theta(x)$, $H_1(x)$, $\Theta_1(x)$, avec le sens que leur donne M. Hermite, sont respectivement

$$H(x) = \mathfrak{S}_1\left(\frac{x}{2\omega_1}\right), \qquad \Theta(x) = \mathfrak{S}_4\left(\frac{x}{2\omega_1}\right),$$

$$H_1(x) = \mathfrak{S}_2\left(\frac{x}{2\omega_1}\right), \qquad \Theta_1(x) = \mathfrak{S}_3\left(\frac{x}{2\omega_1}\right).$$

M Hermite pose ensuite

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(x)}{\Theta(x)}, \qquad \operatorname{cn} x = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{H_1(x)}{\Theta(x)}, \qquad \operatorname{dn} x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

les fonctions qu'il désigne par $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ sont donc celles que nous désignons respectivement par $\operatorname{sn}(x\sqrt{e_1-e_3})$, $\operatorname{cn}(x\sqrt{e_1-e_3})$, $\operatorname{dn}(x\sqrt{e_1-e_3})$. Au surplus, pour M. Hermite, $\frac{\operatorname{sn} x}{x}$ admet pour limite, quand x tend vers o, la quantité qu'il désigne par ω, savoir :

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H'(0)}{\Theta(0)} = \frac{1}{2\omega_1\sqrt{k}}\frac{\mathfrak{I}'_1(0)}{\mathfrak{I}_4(0)} = \sqrt{e_1-e_3}$$

318. Briot et Bouquet emploient les notations

$$\lambda(x), \quad \mu(x), \quad \nu(x)$$

avec le sens que M. Hermite donne aux symboles $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Leurs notations s'identifient avec celles que nous avons suivies, en supposant que les quantités qu'ils désignent par ω, ω' soient celles que nous désignons par $2\omega_1$, $2\omega_3$ et en posant

$$\lambda(x) = \operatorname{sn}(\sqrt{e_1-e_3}\,x),$$
$$\mu(x) = \operatorname{cn}(\sqrt{e_1-e_3}\,x),$$
$$\nu(x) = \operatorname{dn}(\sqrt{e_1-e_3}\,x)$$

319. Si, au lieu de laisser les quantités K, K′ indéterminées, on suppose K et K′ définies comme fonctions de la variable k par les deux intégrales

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

si l'on pose ensuite

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

et si l'on entend alors par $H(x)$, $\Theta(x)$, $H_1(x)$, $\Theta_1(x)$, les quatre fonctions définies par les relations

$$H(x) = \mathfrak{I}_1\left(\frac{x}{2K}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi x}{2K} + \ldots,$$
$$\Theta(x) = \mathfrak{I}_4\left(\frac{x}{2K}\right) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - \ldots,$$
$$H_1(x) = \mathfrak{I}_2\left(\frac{x}{2K}\right) = 2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi x}{2K} + \ldots,$$
$$\Theta_1(x) = \mathfrak{I}_3\left(\frac{x}{2K}\right) = 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} + \ldots,$$

ces quatre fonctions sont précisément celles de Jacobi ([1]). Le lecteur verra plus tard, après avoir étudié le problème de l'inversion, que le sens que nous avons attaché aux symboles $H(x)$, $\Theta(x)$, $H_1(x)$, $\Theta_1(x)$ au n° 315, sens auquel nous nous attacherons dans tout ce qui suivra, est identique à celui de Jacobi.

III. — Transformation linéaire des fonctions elliptiques

320. Si l'on suppose Ω_1 et Ω_3 liés à ω_1, ω_3 par les formules

$$\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,$$

où a, b, c, d sont des entiers liés par la relation $ad - bc = 1$, les fonctions $\xi_{0\alpha}(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$, $\xi_{\beta\gamma}(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$ s'expriment immédiatement au moyen des fonctions $\xi_{0\alpha'}(u \mid \omega_1, \omega_3)$, $\xi_{\beta'\gamma'}(u \mid \omega_1, \omega_3)$, où α', β', γ' désignent comme α, β, γ les trois nombres 1, 2, 3, rangés dans un ordre quelconque. Reportons-nous, en effet, au Tableau (XX_6), ce Tableau permettra de déterminer, suivant les valeurs de a, b, c, d, les valeurs des indices λ, μ, ν tels que l'on ait (XX_5)

$$\begin{aligned}
\sigma\ (u \mid \Omega_1, \Omega_3) &= \sigma(u \mid \omega_1, \omega_3),\\
\sigma_1(u \mid \Omega_1, \Omega_3) &= \sigma_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_3),\\
\sigma_2(u \mid \Omega_1, \Omega_3) &= \sigma_\beta(u \mid \omega_1, \omega_3),\\
\sigma_3(u \mid \Omega_1, \Omega_3) &= \sigma_\gamma(u \mid \omega_1, \omega_3),
\end{aligned}$$

et il est clair que les douze fonctions ξ formées avec les demi-périodes Ω_1, Ω_3 ne seront autres, dans leur ensemble, que les douze fonctions ξ formées avec ω_1, ω_3; mais les indices des fonctions égales ne seront pas les mêmes, sauf dans le cas 1° du Tableau (XX_6).

321 La substitution d'un couple de périodes équivalentes affecte un peu plus profondément les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, à cause du facteur $\sqrt{e_1 - e_3}$ qu'affecte aussi cette substitution

Reprenons les notations du n° 187, et désignons encore par

([1]) Comparez la lettre d'Hermite à Jacobi, *Werke*, t II, p 97 et 98, ou l'on trouve pour la première fois les symboles Θ_1 et H_1

l, l' les quantités $k(\tau)$, $k'(\tau)$, de sorte que l'on ait

$$(\text{LXXX})\quad \begin{cases} (1) & l = -\dfrac{\sqrt{E_2 - E_3}}{\sqrt{E_1 - E_3}} = \dfrac{\Im_2^2(0 \mid \tau)}{\Im_3^2(0 \mid \tau)} = \varphi^4(\tau), \\ (2) & l' = \dfrac{\sqrt{E_1 - E_2}}{\sqrt{E_1 - E_3}} = \dfrac{\Im_4^2(0 \mid \tau)}{\Im_3^2(0 \mid \tau)} = \psi^4(\tau). \end{cases}$$

Posons aussi

$$(\text{LXXX})\quad \begin{cases} (3) & L = \Omega_1 \sqrt{E_1 - E_3}, \\ (4) & iL' = \Omega_3 \sqrt{E_1 - E_3}. \end{cases}$$

On sait, dans chacun des six cas du Tableau (XX_6), exprimer $\sqrt{E_1 - E_3}$ au moyen de $\sqrt{e_2 - e_3}$, $\sqrt{e_1 - e_3}$, $\sqrt{e_1 - e_2}$; on pourra donc exprimer L et L′ au moyen de K, K′, k, k'. Le Tableau ($XLVI_1$) donne, d'autre part, les valeurs de $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ au moyen de $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, et, par suite, les valeurs de $l = \varphi^4(\tau)$, $l' = \psi^4(\tau)$ au moyen de $k = \varphi^4(\tau)$, $k' = \psi^4(\tau)$.

Plaçons-nous dans un cas particulier, par exemple dans le cas 5° du Tableau (XX_6), où $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $\nu = 1$, $a \equiv 0$, $b \equiv 1$, $c \equiv 1$, $d \equiv 0$ (mod. 2). On a alors (XX_7)

$$\sqrt{E_2 - E_3} = i(-1)^{\frac{b+d-1}{2}} \sqrt{e_1 - e_2},$$

$$\sqrt{E_1 - E_3} = i(-1)^{\frac{b+1}{2}} \sqrt{e_1 - e_3},$$

$$\sqrt{E_1 - E_2} = i(-1)^{\frac{a+b-1}{2}} \sqrt{e_2 - e_3},$$

et, en consultant le Tableau du n° 187 ou le Tableau ($XLVI_1$),

$$l = (-1)^{-\frac{cd}{2}} k', \qquad l' = (-1)^{\frac{ab}{2}} k,$$

on a donc aussi

$$L = i(-1)^{\frac{b+1}{2}} [aK + biK'],$$

$$iL' = i(-1)^{\frac{b+1}{2}} [cK + diK']$$

D'après la formule ($LXVII_1$) et en tenant compte du Ta-

bleau (XX_7), on a d'ailleurs

$$\operatorname{sn}(u, l) = \sqrt{E_1 - E_3}\,\frac{\sigma\left[\dfrac{u}{\sqrt{E_1 - E_3}} \,\middle|\, \Omega_1, \Omega_3\right]}{\sigma_3\left[\dfrac{u}{\sqrt{E_1 - E_3}} \,\middle|\, \Omega_1, \Omega_3\right]}$$

$$= \sqrt{E_1 - E_3}\,\frac{\sigma\left[\dfrac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{E_1 - E_3}}\,\dfrac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right]}{\sigma_1\left[\dfrac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{E_1 - E_3}}\,\dfrac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right]}$$

$$= i(-1)^{\frac{b+1}{2}}\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma\left[(-1)^{\frac{b+1}{2}}\dfrac{u}{i\sqrt{e_1 - e_3}}\right]}{\sigma_1\left[(-1)^{\frac{b+1}{2}}\dfrac{u}{i\sqrt{e_1 - e_3}}\right]},$$

d'où finalement en distinguant deux cas, suivant que l'on a $b \equiv +1$ ou que l'on a $b \equiv -1 \pmod{4}$, et en faisant usage des formules ($LXVII_{1-2}$, $LXXII_1$),

$$\operatorname{sn}(u, l) = i\,\frac{\operatorname{sn}\dfrac{u}{i}}{\operatorname{cn}\dfrac{u}{i}}.$$

On trouve de même, dans ce cas 5° du Tableau (XX_6),

$$\operatorname{cn}(u, l) = \frac{1}{\operatorname{cn}\dfrac{u}{i}},$$

$$\operatorname{dn}(u, l) = \frac{\operatorname{dn}\dfrac{u}{i}}{\operatorname{cn}\dfrac{u}{i}}.$$

Ce cas 5° présente un intérêt particulier. Il donne les formules qui permettent de passer du cas où l'argument u est purement imaginaire au cas où l'argument u est réel, k est alors remplacé par $\pm k'$.

On observera que les fonctions $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{sn}(u, l)$ vérifient respectivement les équations différentielles

$$\frac{dy^2}{du^2} = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2),$$

$$\frac{dy^2}{du^2} = (1 - y^2)[1 - (1 - k^2) y^2]$$

On est ainsi amené à cette proposition, que le lecteur vérifiera sans peine : Si une fonction $\varphi(u)$ satisfait à la première de ces équations, la fonction

$$\frac{i\varphi\left(\frac{u}{i}\right)}{\sqrt{1-\varphi^2\left(\frac{u}{i}\right)}}$$

satisfait à la seconde

322 Les calculs se font, dans chaque cas, avec la même facilité. Les résultats sont consignés dans les deux Tableaux qui suivent, que nous avons séparés pour la commodité de l'impression . le premier donne les valeurs de l, l' et du facteur $\frac{1}{M}=\frac{\sqrt{E_1-E_3}}{\sqrt{e_1-e_3}}$, par lequel il faut multiplier $aK+biK'$, $cK+diK'$, pour obtenir L et iL', le second donne les expressions de $\operatorname{sn}(u, l)$, $\operatorname{cn}(u, l)$, $\operatorname{dn}(u, l)$; chacun des six cas des deux Tableaux correspond aux six cas du Tableau (XX_6)

(LXXX₃)

	l	l'	$\frac{1}{M}=\frac{\sqrt{E_1-E_3}}{\sqrt{e_1-e_3}}$.
1°	$(-1)^{\frac{cd}{2}}k$	$(-1)^{-\frac{ab}{2}}k'$	$(-1)^{\frac{a-1}{2}}$
2°	$(-1)^{\frac{cd}{2}}\frac{k}{k'}$	$(-1)^{\frac{ab}{2}}\frac{1}{k'}$	$(-1)^{\frac{d-1}{2}}k'$
3°	$(-1)^{-\frac{cd}{2}}\frac{1}{k}$	$(-1)^{-\frac{ab}{2}}\frac{k'}{k}$	$(-1)^{\frac{a-1}{2}}k$
4°	$(-1)^{\frac{cd}{2}}\frac{1}{k'}$	$(-1)^{\frac{ab}{2}}\frac{k}{k'}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}}k'$
5°	$(-1)^{-\frac{cd}{2}}k'$	$(-1)^{\frac{ab}{2}}k$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}}$
6°	$(-1)^{-\frac{cd}{2}}\frac{k'}{k}$	$(-1)^{-\frac{ab}{2}}k$	$i(-1)^{\frac{c-1}{2}}k$

(LXXX_6)

	$\mathrm{sn}(u, l)$	$\mathrm{cn}(u, l)$.	$\mathrm{dn}(u, l)$
1°	$\mathrm{sn}\,u$	$\mathrm{cn}\,u$	$\mathrm{dn}\,u$
2°	$k' \dfrac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{k'}}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{k'}}$	$\dfrac{\mathrm{cn}\,\frac{u}{k'}}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{k'}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{k'}}$
3°	$k\,\mathrm{sn}\,\frac{u}{k}$	$\mathrm{dn}\,\frac{u}{}$	$\mathrm{cn}\,\frac{u}{k}$
4°	$ik' \dfrac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{ik'}}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{ik'}}$	$\dfrac{\mathrm{dn}\,\frac{u}{ik'}}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{ik'}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{ik'}}$
5°	$i \dfrac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{i}}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{i}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{i}}$	$\dfrac{\mathrm{dn}\,\frac{u}{i}}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{i}}$
6°	$ik \dfrac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{ik}}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{ik}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{ik}}$	$\dfrac{\mathrm{cn}\,\frac{u}{ik}}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{ik}}$

On observera que dans les deux cas 1° et 3°, c'est-à-dire lorsque c est pair, la fonction $\mathrm{sn}\,u$ se transforme en une fonction de même nature.

323 Lorsque c est un nombre pair, on voit sur le Tableau (XX_6) que ν est égal à 3 et sur le Tableau (XLII_8) que $m''' = d$ et que, par suite (XLII_7), on a

$$\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon} = i^{\frac{cd}{2} + c + d - 1}.$$

On a donc, en divisant membre à membre la première et la

quatrième des formules (XLII),

$$\frac{\mathfrak{S}_1(v \mid T)}{\mathfrak{S}_4(v \mid T)} = \frac{\mathfrak{S}_1(\nu \mid \tau)}{\mathfrak{S}_4(\nu \mid \tau)}\, i^{-\frac{cd}{2}-c-d+1}.$$

Dans les notations de Kronecker, cette relation se présente sous la forme

$$\mathrm{El}\left(\frac{\nu}{2a+2b\tau}, \frac{c+d\tau}{2a+2b\tau}\right) = \mathrm{El}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\tau}{2}\right) i^{-\frac{cd}{2}-c-d+1}.$$

En posant

$$a = \alpha, \qquad 2b = \beta, \qquad c = 2\gamma, \qquad d = \delta,$$

et en remplaçant ν et τ par 2ν et 2τ, on a donc

$$\mathrm{El}\left(\frac{\nu}{\alpha+\beta\tau}, \frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right) = \mathrm{El}(\nu, \tau)\, i^{-\delta\gamma+2\gamma+\delta-1},$$

où α, β, γ, δ sont quatre entiers dont le second β est pair et qui sont liés par la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ Cette formule est d'ailleurs équivalente à la suivante :

$$(\mathrm{LXXX}_7) \qquad \mathrm{El}\,[(\delta - \beta T)\nu, T] = \mathrm{El}(\nu, \tau)\, i^{-\delta\gamma+2\gamma+\delta-1},$$

où l'on a posé

$$T = \frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau};$$

c'est la formule de transformation linéaire de la fonction elliptique El, pour β pair, sous la forme dont Kronecker a fait usage.

IV. — Transformation quadratique des fonctions elliptiques.

324 La substitution aux deux demi-périodes ω_1, ω_3 des deux demi-périodes

$$\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,$$

lorsque a, b, c, d sont des entiers et que le déterminant $ad - bc = n$ est positif, dépend de la multiplication d'une période par n et de substitutions à déterminant $+1$ Il nous reste donc à faire pour les fonctions ξ, sn, . ce que nous avons fait pour les fonctions σ et $\mathfrak{S}$ (n^os 130 à 145 et 242 à 270). Les résul-

tats se déduisent, par de simples divisions, de ceux qui ont été établis dans ces mêmes numéros. Comme alors, nous traiterons d'abord du cas où $n = 2$, puis de celui où n est impair

Dans le premier cas, pour ce qui est des fonctions ξ, nous nous dispenserons d'écrire les formules qui résultent immédiatement des Tableaux (XXII) à (XXV); nous nous contenterons de considérer les transformations des fonctions sn, cn, dn et nous nous servirons pour cela des formules relatives aux fonctions $\mathfrak{S}$ qui sont un peu plus avantageuses.

325. Rappelons d'abord, parmi les formules (XLIX), les suivantes

$$\varphi^4(2\tau) = \frac{1-\psi^4(\tau)}{1+\psi^4(\tau)}, \qquad \psi^4(2\tau) = \frac{2\psi^2(\tau)}{1+\psi^4(\tau)},$$

$$\psi^4\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1-\varphi^4(\tau)}{1+\varphi^4(\tau)}, \qquad \varphi^4\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2\varphi^2(\tau)}{1+\varphi^4(\tau)},$$

et observons, en passant, que les deux dernières se déduiraient des deux premières en changeant τ en $-\frac{1}{\tau}$. On en déduit très aisément

$$(\text{XLIX}_{10}) \quad \begin{cases} \sqrt{1+\psi^4(\tau)} = \sqrt{1+k'} = \sqrt{2}\,\dfrac{\psi(\tau)}{\psi^2(2\tau)}, \\[2ex] \sqrt{1-\psi^4(\tau)} = \sqrt{1-k'} = \sqrt{2}\,\dfrac{\psi(\tau)\,\varphi^2(2\tau)}{\psi^2(2\tau)}, \\[2ex] \sqrt{1+\varphi^4(\tau)} = \sqrt{1+k} = \sqrt{2}\,\dfrac{\varphi(\tau)}{\varphi^2\left(\dfrac{\tau}{2}\right)}, \\[2ex] \sqrt{1-\varphi^4(\tau)} = \sqrt{1-k} = \sqrt{2}\,\dfrac{\varphi(\tau)\,\psi^2\left(\dfrac{\tau}{2}\right)}{\varphi^2\left(\dfrac{\tau}{2}\right)} \end{cases}$$

si, dans les derniers membres, on regarde $\sqrt{2}$ comme un nombre positif, ces formules définissent les radicaux $\sqrt{1+k'}$, $\sqrt{1-k'}$, $\sqrt{1+k}$, $\sqrt{1-k}$ comme des fonctions univoques de τ; en d'autres termes, ces formules *fixent le signe* de ces radicaux qui apparaissent dans diverses questions de la théorie des fonctions elliptiques, et que nous prendrons désormais avec cette signification précise. Il est bien clair que, si $\frac{\tau}{i}$ est réel et positif, les radicaux

doivent être pris avec leur sens arithmétique, puisque les derniers membres sont alors manifestement positifs.

Il convient d'observer que l'on a, en adoptant cette détermination des radicaux,

$$\sqrt{1-k'}\sqrt{1+k'}=k, \qquad \sqrt{1-k}\sqrt{1+k}=k',$$

la première de ces relations, en effet, si l'on se reporte aux définitions, équivaut à l'égalité

$$\varphi^4(\tau)\psi^4(2\tau)=2\psi^2(\tau)\varphi^2(2\tau),$$

qui résulte très facilement des formules ($XLIX_{5-6}$). On a aussi

$$\sqrt{2}\sqrt{1+k}\sqrt{1+k'}=1+k+k',$$

puisque les carrés des deux membres sont manifestement égaux et que chacun des deux membres définit une fonction analytique de τ ayant une valeur réelle et positive dans le cas particulier où $\frac{\tau}{i}$ est réel et positif.

Les formules qui définissent $\sqrt{1+k'}$, $\sqrt{1-k'}$, .. donnent, inversement,

$$\varphi^2(2\tau)=\frac{\sqrt{1-k'}}{\sqrt{1+k'}}, \qquad \psi^2(2\tau)=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{1+k'}},$$

$$\varphi^2\left(\frac{\tau}{2}\right)=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1+k}}, \qquad \psi^2\left(\frac{\tau}{2}\right)=\frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k}}$$

326. Plaçons-nous dans le cas où aux demi-périodes ω_1, ω_3 on substitue les demi-périodes $\frac{\omega_1}{2}$, ω_3, τ est alors remplacé par 2τ et si l'on désigne par $\sqrt{l}$ et $\sqrt{l'}$ les quantités $\varphi^2(2\tau)$, $\psi^2(2\tau)$ qui remplacent $\sqrt{k}=\varphi^2(\tau)$ et $\sqrt{k'}=\psi^2(\tau)$, on aura, d'après ce qu'on vient de dire,

$$\text{(LXXXI)}\quad \begin{cases} (1) & \sqrt{l}=\dfrac{\sqrt{1-k'}}{\sqrt{1+k'}}=\dfrac{k}{1+k'}=\dfrac{1-k'}{k}, \\ (2) & \sqrt{l'}=\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{1+k'}}, \end{cases}$$

où les signes des radicaux, fixés comme on l'a expliqué, sont assurément tels que les valeurs de $\sqrt{l}$, $\sqrt{l'}$ coïncident respective-

ment avec celles de

$$\frac{\mathfrak{S}_2(0 \mid 2\tau)}{\mathfrak{S}_3(0 \mid 2\tau)}, \qquad \frac{\mathfrak{S}_4(0 \mid 2\tau)}{\mathfrak{S}_3(0 \mid 2\tau)}.$$

327. Si l'on désigne maintenant par E_1, E_3, $\sqrt{E_1 - E_3}$, les quantités qui remplacent e_1, e_3, $\sqrt{e_1 - e_3}$ et par L, L' les quantités qui remplacent K, K', savoir :

$$E_1 = p\left(\frac{\omega_1}{2} \middle| \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right), \qquad E_3 = p\left(\omega_3 \middle| \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right), \qquad E_1 + E_2 + E_3 = 0,$$

$$\sqrt{E_1 - E_3} = \xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{2} \middle| \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right),$$

$$\text{(LXXXI)} \quad \begin{cases} (3) \quad L = \dfrac{\omega_1}{2}\sqrt{E_1 - E_3} = \dfrac{\pi}{2}\mathfrak{S}_3^2(0 \mid 2\tau), \\ (4) \quad L' = \dfrac{2\tau}{i} L = 2\dfrac{K'}{K} L, \end{cases}$$

et, si l'on pose

$$\text{(LXXXI}_5\text{)} \qquad M = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{E_1 - E_3}},$$

on aura

$$\frac{L}{K} = \frac{1}{2M} = \frac{\mathfrak{S}_3^2(0 \mid 2\tau)}{\mathfrak{S}_3^2(0 \mid \tau)},$$

et, par suite, en appliquant la formule (XLVII_4),

$$\mathfrak{S}_3^2(0 \mid 2\tau) = \frac{1}{2}[\mathfrak{S}_3^2(0 \mid \tau) + \mathfrak{S}_4^2(0 \mid \tau)] = \frac{1 + k'}{2}\mathfrak{S}_3^2(0 \mid \tau),$$

il viendra

$$\text{(LXXXI)} \quad \begin{cases} (3) \quad L = \dfrac{1 + k'}{2} K = \dfrac{K}{2M}, \\ (4) \quad L' = (1 + k')K' = \dfrac{K'}{M}. \end{cases}$$

328. La formule (LXXI_0) donne ensuite

$$\operatorname{sn}(u, l) = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{\mathfrak{S}_1\left(\dfrac{u}{2L} \middle| 2\tau\right)}{\mathfrak{S}\left(\dfrac{u}{2L} \middle| 2\tau\right)}.$$

En appliquant les formules de transformation ($XLVII_3$), on a donc

$$\operatorname{sn}(u, l) = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{4L}\right) \vartheta_2\left(\frac{u}{4L}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{4L}\right) \vartheta_3\left(\frac{u}{4L}\right)};$$

mais, en vertu de la valeur trouvée plus haut pour L et des formules ($LXXI_{6-8}$), on a

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\frac{K}{2L}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\frac{K}{2L}\right)} = \sqrt{k}\operatorname{sn}\frac{u}{1+k'},$$

$$\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\frac{K}{2L}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\frac{K}{2L}\right)} = \sqrt{k}\,\frac{\operatorname{cn}\frac{u}{1+k'}}{\operatorname{dn}\frac{u}{1+k'}};$$

donc

$$\operatorname{sn}(u, l) = \frac{k}{\sqrt{l}} \frac{\operatorname{sn}\frac{u}{1+k'}\operatorname{cn}\frac{u}{1+k'}}{\operatorname{dn}\frac{u}{1+k'}}.$$

Comme nous venons de voir ($LXXXI_1$) que $\frac{k}{\sqrt{l}}$ est égal à $1+k'$, on a donc enfin

$$(LXXXII_1) \qquad \operatorname{sn}(u, l) = (1+k')\frac{\operatorname{sn}\frac{u}{1+k'}\operatorname{cn}\frac{u}{1+k'}}{\operatorname{dn}\frac{u}{1+k'}}$$

On est amené ainsi à cette conclusion : si la fonction $f(u)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dy^2}{du^2} = (1-u^2)(1-k^2u^2),$$

la fonction

$$\frac{(1+k')f\left(\frac{u}{1+k'}\right)\sqrt{1-f^2\left(\frac{u}{1+k'}\right)}}{\sqrt{1-k^2f^2\left(\frac{u}{1+k'}\right)}}$$

vérifiera l'équation différentielle

$$\frac{dz^2}{du^2} = (1 - u^2)\left[1 - \left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2 u^2\right],$$

et c'est ce que le lecteur constatera en effet sans peine.

On trouve de même, en tenant compte des formules qui donnent $\sqrt{l}$, $\sqrt{l'}$ en fonction de k et de k',

$$(\text{LXXXII})\quad \begin{cases} (2)\quad \operatorname{cn}(u, l) = \dfrac{\operatorname{dn}^2\dfrac{u}{1+k'} - k'}{(1-k')\operatorname{dn}\dfrac{u}{1+k'}} = \dfrac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k'}}{\operatorname{dn}\dfrac{u}{1+k'}}, \\[2ex] (3)\quad \operatorname{dn}(u, l) = \dfrac{\operatorname{dn}^2\dfrac{u}{1+k'} + k'}{(1+k')\operatorname{dn}\dfrac{u}{1+k'}} = \dfrac{1-(1-k')\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k'}}{\operatorname{dn}\dfrac{u}{1+k'}} \end{cases}$$

La transformation que nous venons de considérer est dite *transformation de Landen*.

329. Le cas où l'on remplace ω_1, ω_3 par ω_1, $\frac{\omega_3}{2}$, ou τ par $\frac{\tau}{2}$, se traite de la même façon au moyen des formules (XLVIII), nous nous contenterons d'inscrire les résultats

Si l'on désigne ici par $\sqrt{\lambda}$ et $\sqrt{\lambda'}$ les quantités $\varphi^2\left(\frac{\tau}{2}\right)$, $\psi^2\left(\frac{\tau}{2}\right)$ et par E'_1, E'_3 les quantités (XXIV_5); si enfin l'on pose

$$(\text{LXXXIII})\quad \begin{cases} (3)\quad \Lambda = \omega_1\sqrt{E'_1 - E'_3} = \dfrac{\pi}{2}\Im_3^2\left(0\,\middle|\,\dfrac{\tau}{2}\right), \\[2ex] (4)\quad \Lambda' = \dfrac{\tau}{2i}\Lambda = \dfrac{K'}{2K}\Lambda, \end{cases}$$

$$(\text{LXXXIII}_5)\qquad M = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{E'_1 - E'_3}},$$

on aura

$$(\text{LXXXIII})\quad \begin{cases} (1)\quad \sqrt{\lambda} = \sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1+k}}, \\[2ex] (2)\quad \sqrt{\lambda'} = \dfrac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k}} = \dfrac{k'}{1+k} = \dfrac{1-k}{k'} \end{cases}$$

et

(LXXXIII$_5$) $$M = \frac{\vartheta_3^2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{1}{1+k},$$

d'où

(LXXXIII) $$\begin{cases} (3) & \Lambda = (1+k)K = \dfrac{K}{M}, \\ (4) & \Lambda' = \dfrac{1+k}{2}\,K' = \dfrac{K'}{2M}. \end{cases}$$

330. On aura aussi en faisant usage des formules (LXXI$_{6-8}$)

(LXXXIV) $$\begin{cases} (1) & \operatorname{sn}(u,\lambda) = (1+k)\dfrac{\operatorname{sn}\dfrac{u}{1+k}}{1+k\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k}}, \\ (2) & \operatorname{cn}(u,\lambda) = \dfrac{\operatorname{cn}\dfrac{u}{1+k}\operatorname{dn}\dfrac{u}{1+k}}{1+k\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k}}, \\ (3) & \operatorname{dn}(u,\lambda) = \dfrac{1-k\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k}}{1+k\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k}}. \end{cases}$$

Il est à peine nécessaire de faire observer que l'on peut parvenir au même résultat en exprimant d'abord les trois fonctions elliptiques $\operatorname{sn}(u,\lambda)$, $\operatorname{cn}(u,\lambda)$, $\operatorname{dn}(u,\lambda)$ au moyen des fonctions $\operatorname{sn}(u,\lambda')$, $\operatorname{cn}(u,\lambda')$, $\operatorname{dn}(u,\lambda')$, ce qui est une transformation linéaire (cas 5° des Tableaux LXXX$_{5-6}$); puis les trois fonctions $\operatorname{sn}(u,\lambda')$, $\operatorname{cn}(u,\lambda')$, $\operatorname{dn}(u,\lambda')$ au moyen des fonctions $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+k'}, k'\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{1+k'}, k'\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{1+k'}, k'\right)$, ce qui est une transformation de Landen, puis enfin les trois fonctions $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+k'}, k'\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{1+k'}, k'\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{1+k'}, k'\right)$, au moyen des fonctions $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+k}, k\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{1+k}, k\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{1+k}, k\right)$, ce qui est une nouvelle transformation linéaire.

La transformation précédente est dite *transformation de Gauss*.

331. Les formules de transformation quadratique des fonc-

tions ϑ, à l'aide desquelles nous venons d'établir les formules de Landen et de Gauss, permettent aussi, comme l'a montré M. Hermite ([1]), d'obtenir des développements pour les fonctions elliptiques sn, cn, dn, dont l'importance a été mise en pleine lumière par l'illustre auteur.

Les formules

$$\vartheta_1(v)\vartheta_2(v) = \frac{q_0}{q_1}\vartheta_1(2v\,|\,2\tau),$$

$$\vartheta_3(v)\vartheta_4(v) = \frac{q_0}{q_1}\vartheta_4(2v\,|\,2\tau),$$

$$\vartheta_1(v)\vartheta_4(v) = \frac{q_0}{q_3}q^{\frac{1}{8}}\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right),$$

$$\vartheta_2(v)\vartheta_3(v) = \frac{q_0}{q_3}q^{\frac{1}{8}}\vartheta_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right),$$

$$\vartheta_1(v)\vartheta_3(v) = \frac{q_0}{q_2}q^{\frac{1}{8}}e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau+1}{2}\right),$$

$$\vartheta_2(v)\vartheta_4(v) = \frac{q_0}{q_2}q^{\frac{1}{8}}e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau+1}{2}\right),$$

dont les deux premières sont identiques à deux des formules (XLVII_3), dont les deux suivantes sont identiques à deux des formules (XLVIII_8), et dont les deux dernières se déduisent des précédentes par le changement de τ en $\tau+1$, donnent immédiatement, par de simples divisions et en tenant compte de la définition des fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, d'une part, les relations

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{q_1}{q_2}\,q^{\frac{1}{8}}e^{-\frac{\pi i}{8}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\,\middle|\,\frac{\tau+1}{2}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{K}\,\middle|\,2\tau\right)}$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{8}}\,\frac{1}{\sqrt{2}\,\varphi(\tau)}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\,\middle|\,\frac{\tau+1}{2}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{K}\,\middle|\,2\tau\right)},$$

([1]) *Comptes rendus*, t. LVII, p. 995, et dans son Mémoire *Sur quelques formules relatives au module dans la théorie des fonctions elliptiques* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. IX, p. 313).

$$\operatorname{cn} u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\,\frac{q_1}{q_3}\,q^{\frac{1}{8}}\,\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{K}\middle|2\tau\right)}$$

$$= \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{2}\,\varphi(\tau)}\,\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{K}\middle|2\tau\right)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)} = \sqrt{k'}\,\frac{q_2}{q_3}\,e^{\frac{\pi i}{8}}\,\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau+1}{2}\right)}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{8}}\,\psi(\tau)\,\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau+1}{2}\right)},$$

et, d'autre part, les relations

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{q_2}{q_1}\,q^{-\frac{1}{8}}\,e^{\frac{\pi i}{8}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{K}\middle|2\tau\right)}{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\varphi^3(\tau)}\,e^{\frac{\pi i}{8}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{K}\middle|2\tau\right)}{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau+1}{2}\right)},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\,\frac{q_3}{q_1}\,q^{-\frac{1}{8}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{K}\middle|2\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{\psi^3(\tau)}{\varphi^3(\tau)}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{K}\middle|2\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau}{2}\right)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)} = \sqrt{k'}\,\frac{q_3}{q_2}\,e^{-\frac{\pi i}{8}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau+1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{8}}\,\psi^3(\tau)\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau+1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}$$

Par un groupement convenable des termes des séries (XXXII_{1-1}) qui définissent les fonctions ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, on peut déduire de ces six relations les développements donnés par M. Hermite.

En remarquant que, si l'on change τ en $\frac{\tau+1}{2}$, q devient $i\sqrt{q}$, on a, par exemple, pour le développement de la fonction $\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau+1}{2}\right)$ qui figure aux numérateurs de la première et de la dernière des six relations,

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau+1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} 2(-1)^n i^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} q^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K}$$

$$= 2e^{\frac{\pi i}{8}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n(n+1)} q^{\frac{4n(n+1)+1}{8}} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K},$$

ou, en séparant les termes de rang pair et ceux de rang impair,

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\frac{\tau+1}{2}\right) = 2e^{\frac{\pi i}{8}}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} i^{2\nu(2\nu+1)} q^{\nu(2\nu+1)+\frac{1}{8}} \sin(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} i^{2\nu(2\nu-1)} q^{\nu(2\nu-1)+\frac{1}{8}} \sin(4\nu-1)\frac{\pi u}{2K}\right]$$

$$= 2e^{\frac{\pi i}{8}} q^{\frac{1}{8}} \sum_{\nu} (-1)^\nu q^{\nu(2\nu+1)} \sin(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K},$$

où dans la dernière somme l'indice ν prend toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

On a ainsi les développements

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\varphi(\tau)}\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}} \frac{\sum_{\nu} (-1)^\nu q^{\nu(2\nu+1)} \sin(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K}}{\sum_{\nu} (-1)^\nu q^{2\nu^2} \cos 2\nu\frac{\pi u}{K}}$$

$$= \frac{1}{\varphi^3(\tau)}\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}} \frac{\sum_{\nu} q^{4\nu(2\nu+1)} \sin(4\nu+1)\frac{\pi u}{K}}{\sum_{\nu} (-1)^\nu q^{\nu(2\nu+1)} \cos(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K}},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)} \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{\sum\limits_{\nu} q^{\nu(2\nu+1)} \cos(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K}}{\sum\limits_{\nu} (-1)^{\nu} q^{2\nu^2} \cos 2\nu \frac{\pi u}{K}}$$

$$= \frac{\psi^3(\tau)}{\varphi^3(\tau)} \sqrt{2}\, q^{\frac{3}{8}} \frac{\sum\limits_{\nu} q^{4\nu(2\nu+1)} \sin(4\nu+1)\frac{\pi u}{K}}{\sum\limits_{\nu} q^{\nu(2\nu+1)} \sin(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K}},$$

$$\operatorname{dn} u = \psi(\tau) \frac{\sum\limits_{\nu} q^{\nu(2\nu+1)} \cos(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K}}{\sum\limits_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu(2\nu+1)} \cos(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K}}$$

$$= \psi^3(\tau) \frac{\sum\limits_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu(2\nu+1)} \sin(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K}}{\sum\limits_{\nu} q^{\nu(2\nu+1)} \sin(4\nu+1)\frac{\pi u}{2K}}.$$

332. Pour $u = 0$, les développements de $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ donnent, en prenant préalablement les dérivées par rapport à u des numérateurs et dénominateurs des derniers membres qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$,

$$1 = \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)} \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{\sum\limits_{\nu} q^{\nu(2\nu+1)}}{\sum\limits_{\nu} (-1)^{\nu} q^{2\nu^2}} = \frac{\psi^3(\tau)}{\varphi^3(\tau)} \sqrt{2}\, q^{\frac{3}{8}} \frac{\sum\limits_{\nu} 2(4\nu+1) q^{4\nu(2\nu+1)}}{\sum\limits_{\nu} (4\nu+1) q^{\nu(2\nu+1)}},$$

$$1 = \psi(\tau) \frac{\sum\limits_{\nu} q^{\nu(2\nu+1)}}{\sum\limits_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu(2\nu+1)}} = \psi^3(\tau) \frac{\sum\limits_{\nu} (-1)^{\nu} (4\nu+1) q^{\nu(2\nu+1)}}{\sum\limits_{\nu} (4\nu+1) q^{\nu(2\nu+1)}},$$

on a donc, pour les fonctions modulaires $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\varphi^3(\tau)$, $\psi^3(\tau)$, les développements

$$\sqrt[4]{k} = \varphi(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{\sum\limits_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu(2\nu+1)}}{\sum\limits_{\nu} (-1)^{\nu} q^{2\nu^2}},$$

$$\sqrt[4]{k'} = \psi(\tau) = \frac{\sum_\nu (-1)^\nu q^{\nu(2\nu+1)}}{\sum_\nu q^{\nu(2\nu+1)}},$$

$$\sqrt[4]{k^3} = \varphi^3(\tau) = \sqrt{8}\, q^{\frac{3}{8}} \frac{\sum_\nu (4\nu+1)\, q^{4\nu(2\nu+}}{\sum_\nu (-1)^\nu (4\nu+1)\, q^{\nu(2\nu+1)}},$$

$$\sqrt[4]{k'^3} = \psi^3(\tau) = \frac{\sum_\nu (4\nu+1)\, q^{\nu(2\nu+1)}}{\sum_\nu (-1)^\nu (4\nu+1)\, q^{\nu(2\nu+1)}},$$

dont les deux premiers ont été déduits par Jacobi des développements en produits infinis, qui nous ont servi de définition pour les fonctions $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$.

333. En combinant les transformations de Landen et de Gauss, on obtient les expressions de $\operatorname{sn}(2u)$, $\operatorname{cn}(2u)$, $\operatorname{dn}(2u)$ en fonction de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$,

$$(\text{LXXXV}) \quad \begin{cases} (1) \quad \operatorname{sn} 2u = \dfrac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \\ (2) \quad \operatorname{cn} 2u = \dfrac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \\ (3) \quad \operatorname{dn} 2u = \dfrac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \end{cases}$$

et ces formules coïncident avec celles que l'on obtient en faisant $a = u$ dans les formules (LXXIII_{1-3}).

La formule (LXVII_7) permet ensuite d'obtenir l'expression de $\wp(2u)$ en fonction de $\wp(u)$. On a d'abord

$$\wp(2u) = e_3 + \frac{[(\wp u - e_3)^2 - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)]^2}{\wp'^2 u},$$

puis, après quelques réductions faciles reposant sur l'emploi des formules (VII),

$$\wp(2u) = \frac{\left(\wp^2 u + \frac{g_2}{4}\right)^2 + 2 g_3 \wp u}{\wp'^2 u}.$$

On aurait pu, tout aussi bien, déduire cette formule en combinant les deux formules ($XXII_3$) et ($XXIV_3$).

334. Après avoir remplacé u par $\frac{u}{2}$ dans ces formules, on en tire, par des combinaisons faciles, les relations

$$\operatorname{sn}^2\frac{u}{2} = \frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u},$$

$$\operatorname{cn}^2\frac{u}{2} = \frac{\operatorname{dn}u+\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u},$$

$$\operatorname{dn}^2\frac{u}{2} = \frac{k'^2+\operatorname{dn}u+k^2\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u},$$

dont les deux dernières résultent d'ailleurs immédiatement de la première et des expressions de $\operatorname{cn}^2\frac{u}{2}$, $\operatorname{dn}^2\frac{u}{2}$ au moyen de $\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}$.

L'usage de ces formules est évident, en y supposant successivement $u = K$, $u = iK'$, on obtient

$$\operatorname{sn}^2\frac{K}{2} = \frac{1}{1+k'}, \qquad \operatorname{sn}^2\frac{iK'}{2} = -\frac{1}{k},$$

$$\operatorname{cn}^2\frac{K}{2} = \frac{k'}{1+k'}, \qquad \operatorname{cn}^2\frac{iK'}{2} = \frac{1+k}{k},$$

$$\operatorname{dn}^2\frac{K}{2} = k', \qquad \operatorname{dn}^2\frac{iK'}{2} = 1+k$$

En se plaçant d'abord dans le cas où $\frac{\tau}{i}$, K, K' sont des nombres réels et positifs, et en se reportant à ce que l'on a dit aux n^{os} 311-312 sur les valeurs de $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$ quand u est réel ou purement imaginaire, on voit que l'on a, dans tous les cas,

$$\operatorname{sn}\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \qquad \operatorname{sn}\frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}},$$

$$\operatorname{cn}\frac{K}{2} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}, \qquad \operatorname{cn}\frac{iK'}{2} = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}},$$

$$\operatorname{dn}\frac{K}{2} = \sqrt{k'}, \qquad \operatorname{dn}\frac{iK'}{2} = \sqrt{1+k}.$$

Si d'ailleurs on adopte les conventions du n° 325, on voit immédiatement que les deux membres de chacune de ces égalités sont des fonctions analytiques univoques de τ, et que, par conséquent, ces égalités subsistent toutes pour les valeurs de τ repré-

sentées par des points situés au-dessus de l'axe des quantités réelles.

On pourrait opérer de même pour obtenir les valeurs des fonctions sn, cn, dn quand l'argument est égal à $\frac{K+iK'}{2}$; mais, pour éviter des discussions de signes concernant les radicaux, il est plus simple de déduire ces valeurs des formules d'addition (LXXIII), en supposant $u=\frac{K}{2}$, $a=\frac{iK'}{2}$, on trouve ainsi

$$\operatorname{sn}\frac{K+iK'}{2}=\frac{\sqrt{1+k'}}{\sqrt{k}}\,\frac{1+k+ik'}{1+k+k'}=\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k}\right),$$

la dernière transformation résulte des égalités

$$\begin{aligned}1+k+ik'&=\sqrt{1+k}\left(\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k}\right),\\ 1+k+k'&=\sqrt{2}\,\sqrt{1+k}\,\sqrt{1+k'}\end{aligned}$$

On trouve de la même façon

$$\begin{aligned}\operatorname{cn}\frac{K+iK'}{2}&=\frac{\sqrt{k'}\,\sqrt{1+k}\,\sqrt{1+k'}\,(1-i)}{\sqrt{k}\,(1+k+k')}=\frac{\sqrt{k'}\,(1-i)}{\sqrt{2}\,\sqrt{k}},\\ \operatorname{dn}\frac{K+iK'}{2}&=\frac{\sqrt{k'}\,\sqrt{1+k}\,(1+k'-ik)}{1+k+k'}=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+k'}-i\sqrt{1-k'}\right).\end{aligned}$$

V — Transformation d'ordre n des fonctions elliptiques

335. Arrivons maintenant au cas où l'on divise l'une des demi-périodes, ω_1 par exemple, par un nombre impair n

Nous désignerons, comme au n° 136, les constantes relatives aux fonctions $p\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_3\right)$, $\sigma\left(u\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_3\right)$ par de petites capitales; ainsi

$$\mathrm{E}_1=p\left(\frac{\omega_1}{n}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_3\right),\qquad \mathrm{E}_3=p\left(\omega_3\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_3\right),\qquad \mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3=0,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2}&=\xi_{20}\left(\frac{\omega_1}{n}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_3\right),\\ \sqrt{\mathrm{E}_2-\mathrm{E}_3}&=-\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{n}+\omega_3\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_3\right),\\ \sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3}&=\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{n}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_3\right),\end{aligned}$$

d'après les formules ($XXXVI_4$), on a donc

$$\sqrt{E_1 - E_2} = n\frac{\pi}{2\omega_1}\vartheta_4^2(0\,|\,n\tau),$$

$$\sqrt{E_2 - E_3} = -n\frac{\pi}{2\omega_1}\vartheta_2^2(0\,|\,n\tau),$$

$$\sqrt{E_1 - E_3} = n\frac{\pi}{2\omega_1}\vartheta_3^2(0\,|\,n\tau).$$

Nous poserons aussi

$$M = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{E_1 - E_3}}.$$

En outre, l, l' désigneront les quantités qui remplacent k, k', savoir :

$$(\text{LXXXVI})\quad\begin{cases}(1)\quad l = -\dfrac{\sqrt{E_2 - E_3}}{\sqrt{E_1 - E_3}} = \dfrac{\vartheta_2^2(0\,|\,n\tau)}{\vartheta_3^2(0\,|\,n\tau)},\\[2ex](2)\quad l' = \dfrac{\sqrt{E_1 - E_2}}{\sqrt{E_1 - E_3}} = \dfrac{\vartheta_4^2(0\,|\,n\tau)}{\vartheta_3^2(0\,|\,n\tau)},\end{cases}$$

et L, L′ les quantités qui remplacent K, K′, savoir :

$$(\text{LXXXVI})\quad\begin{cases}(6)\quad L = \dfrac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0\,|\,n\tau) = \dfrac{\omega_1}{n}\sqrt{E_1 - E_3} = \dfrac{\sqrt{E_1 - E_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}}\dfrac{K}{n} = \dfrac{K}{nM},\\[2ex](7)\quad L' = \dfrac{n\tau}{i}L = \dfrac{1}{i}\omega_3\sqrt{E_1 - E_3} = \dfrac{\sqrt{E_1 - E_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}}K' = \dfrac{K'}{M}\end{cases}$$

Dans tous les cas où K, K′ et n ne changent pas de valeur dans une même recherche, nous représenterons par une lettre unique l'expression

$$\frac{2rK + 2r'K'i}{n},$$

où r et r' désignent des entiers quelconques; nous poserons

$$a_{r,r'} = \frac{2rK + 2r'K'i}{n},$$

de sorte que les symboles $a_{r,0}$, $a_{0,r}$, qui seront d'un usage fréquent dans ce paragraphe, représenteront les deux quantités

$$a_{r,0} = \frac{2rK}{n}, \qquad a_{0,r} = \frac{2rK'i}{n}.$$

Cette notation permet de réduire notablement la place que prennent les formules.

336. En se reportant aux formules (XXVI$_1$) on aura par de simples divisions

$$\xi_{0\alpha}\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = \xi_{0\alpha} u \prod_{(r)} \frac{\xi_{0\alpha}\left(u + \frac{2r\omega_1}{n}\right)}{\xi_{0\alpha}\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right)},$$

$$\xi_{\beta\gamma}\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = \xi_{\beta\gamma} u \prod_{(r)} \frac{\xi_{\beta\gamma}\left(u + \frac{2r\omega_1}{n}\right)}{\xi_{\beta\gamma}\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right)},$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

Dans les seconds membres les fonctions ξ se rapportent naturellement aux demi-périodes (ω_1, ω_3) et il en sera de même toutes les fois que ces demi-périodes ne seront pas écrites explicitement. Quant aux nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, rappelons que ce sont $n-1$ nombres entiers dont aucun n'est divisible par n, non plus que la différence de deux d'entre eux.

337. On peut écrire aussi (XXVI$_{4-6}$)

$$\xi_{0\alpha}\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = \xi_{0\alpha} u \prod_{(r)} \frac{1 - \xi_{0\alpha}^2 u\, \xi_{\alpha 0}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}{1 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\, \xi_{0\alpha}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right) \xi_{0\alpha}^2 u},$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Ici les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$ sont toujours des entiers, aucun n'est divisible par n, non plus que la différence ou la somme de deux quelconques d'entre eux; au surplus, quand nous écrirons au-dessous d'une formule que r doit prendre, ou les valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, ou les valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$, nous entendrons toujours, comme dans les Chapitres précédents, que ces valeurs satisfont aux conditions que nous venons de rappeler, soit dans un cas, soit dans l'autre.

La formule précédente montre que $\xi_{0\alpha}\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$ est une

fonction rationnelle de $\xi_{0\alpha} u$; on voit de même que $\xi_{\beta\gamma}\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$ est une fonction rationnelle de $\xi_{\beta\gamma} u$: c'est le produit de $\xi_{\beta\gamma} u$ par une fonction rationnelle du carré de l'une quelconque des fonctions ξ, comme on le voit en faisant usage des relations ($XXVI_5$) et (LIX_6)

Nous nous dispensons de multiplier les formules de cette nature qui sont implicitement contenues dans les formules (XXVI). Toutefois, nous observerons que les fonctions rationnelles ainsi formées comportent comme coefficients, en dehors des quantités e_1, e_2, e_3 qui y figurent explicitement, des fonctions symétriques de $p\left(\frac{2\omega_1}{n}\right)$, $p\left(\frac{4\omega_1}{n}\right)$, $\ldots$, $p\left[\frac{(n-1)\omega_1}{n}\right]$; ces fonctions symétriques, comme on le verra plus tard, dépendent, lorsque n est premier, d'une équation de degré $n+1$, dont les coefficients sont des fonctions entières de e_1, e_2, e_3 et même de g_2, g_3.

338. Ces formules vont nous fournir d'abord l'expression de quelques constantes dont nous allons avoir besoin.

Si nous nous rappelons en effet les formules (LX_2)

$$k = \xi_{21}\omega_3, \qquad k' = \xi_{23}\omega_1,$$

nous trouverons au moyen des formules du n° 336, en supposant $\beta = 2$ et, successivement, $\gamma = 1$, $\gamma = 3$, et en faisant successivement $u = \omega_3$, $u = \frac{\omega_1}{n}$,

$$l = \xi_{21}\left(\omega_3 \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3'\right) = \xi_{21}\omega_3 \prod_{(r)} \frac{\xi_{21}\left(\omega_3 + \frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\xi_{21}\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)},$$
$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

ou, en tenant compte des formules (LX_4), pour $u = \frac{2r}{n}\omega_1$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ et des formules ($XXXVII_4$, $XIII_4$),

$$(LXXXVI_1) \quad l = k^n \prod_{(r)} \xi_{12}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right), \qquad (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

ou encore

$$l = k^n \prod_{(r)} \xi_{12}^4\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right), \qquad \left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right);$$

puis

$$l' = \xi_{23}\left(\frac{\omega_1}{n}\middle|\frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = \xi_{23}\frac{\omega_1}{n}\prod_{(r)}\frac{\xi_{23}\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right)}{\xi_{23}\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}$$
$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

ou, toujours en tenant compte des formules (LX_4) et ($XXXVII_5$),

$$l' = k'^n \xi_{32}\left(\frac{1-n}{n}\omega_1\right)\prod_{(r)}\frac{\xi_{32}\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}{\xi_{23}\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}.$$

Si l'on observe que l'on peut ajouter sans inconvénient $2\omega_1$ à l'argument de $\xi_{23}u$ et que $\xi_{23}(0)$ est égal à un, on voit que le second membre peut s'écrire

$$k'^n \prod_{(r')}\frac{1}{\xi_{23}^2\left(\frac{2r'}{n}\omega_1\right)},$$

où r' prend n valeurs entières assujetties seulement à cette condition que la différence de deux quelconques d'entre elles ne soit pas divisible par n; on peut donc, en reprenant nos notations habituelles, écrire

$$(LXXXVI_2)\quad l' = k'^n \prod_{(r)}\xi_{32}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right), \qquad (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

ou

$$l' = k'^n \prod_{(r)}\xi_{32}^4\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right), \qquad \left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Formons encore la quantité $\sqrt{E_1 - E_3}$; rappelons-nous que l'on a (LX_1)

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \xi_{30}\omega_1;$$

on en conclura

$$\frac{1}{\sqrt{E_1 - E_3}} = \xi_{03}\left(\frac{\omega_1}{n}\middle|\frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = \xi_{03}\left(\frac{\omega_1}{n}\right)\prod_{(r)}\frac{\xi_{03}\left(\frac{2r+1}{n}\omega_1\right)}{\xi_{03}\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)},$$

ou, en donnant à r les valeurs

$$-1, \quad -2, \quad \ldots, \quad -\frac{n-1}{2}, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{2},$$

et en observant que la dernière valeur de r met en évidence le facteur $\xi_{03}\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}$, on trouve, après quelques réductions immédiates,

$$\text{(LXXXVI}_5\text{)} \qquad \mathrm{M} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3}} = \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \frac{\xi_{03}^2\left(\frac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\xi_{03}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}.$$

Si l'on admet, comme on le montrera plus tard, que la quantité $p\left(r\frac{\omega_1}{n}\right)$, où r est un nombre entier, est une fonction algébrique de e_1, e_2, e_3, il sera évident par les formules précédentes que les quantités l, l', M sont elles-mêmes des fonctions algébriques de e_1, e_2, e_3, ou, si l'on veut, de e_1 et de k, mais il est manifeste que e_1 ne doit pas y figurer, en effet, les quantités l, l', M, de même que k et k', ne dépendent que de τ, en d'autres termes, ne changent pas quand on multiplie ω_1, ω_3 par un même nombre m; mais alors e_1 est multiplié par $\frac{1}{m^2}$, par conséquent l, l', M sont des fonctions algébriques de k seul, en d'autres termes, il existe une équation algébrique entre l et k, et une équation algébrique entre M et k Ces équations sont dites respectivement *équation modulaire* et *équation au multiplicateur*.

339 Il suffit de se reporter aux formules de passage des fonctions ξ aux fonctions sn, cn, dn pour obtenir les expressions de $\mathrm{sn}(u, l)$, $\mathrm{cn}(u, l)$, $\mathrm{dn}(u, l)$; on obtient tout d'abord pour les constantes

$$l = k^n \prod_{(r)} \frac{\mathrm{cn}^2 a_{r,0}}{\mathrm{dn}^2 a_{r,0}}, \qquad l' = k'^n \prod_{(r)} \frac{1}{\mathrm{dn}^2 a_{r,0}},$$
$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}),$$

$$\mathrm{M} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3}} = \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2r-1}{n}\mathrm{K}\right)}{\mathrm{sn}^2\frac{2r\mathrm{K}}{n}},$$

ou encore

$$\text{(LXXXVI}_6\text{)} \qquad \mathrm{M} = \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{cn}^2 a_{r,0}}{\mathrm{sn}^2 a_{r,0}\,\mathrm{dn}^2 a_{r,0}}.$$

Maintenant, la première des formules du n° 336, en y supposant

$\alpha = 3$, donne

$$\frac{1}{\sqrt{E_1 - E_3}} \operatorname{sn}\left(u\sqrt{E_1 - E_3}, l\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \operatorname{sn}\left(u\sqrt{e_1 - e_3}\right) \prod_{(r)} \frac{\operatorname{sn}\left(u\sqrt{e_1 - e_3} + a_{r,0}\right)}{\operatorname{sn} a_{r,0}}$$

ou, en remplaçant u par $\dfrac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}$,

$$(\text{LXXXVII}_1) \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{1}{M} \operatorname{sn} u \prod_{(r)} \frac{\operatorname{sn}(u + a_{r,0})}{\operatorname{sn} a_{r,0}}.$$

De même

$$(\text{LXXXVII}) \begin{cases} (2) \quad \operatorname{cn}\left(\dfrac{u}{M}, l\right) = \operatorname{cn} u \displaystyle\prod_{(r)} \frac{\operatorname{cn}(u + a_{r,0})}{\operatorname{cn} a_{r,0}}, \\ (3) \quad \operatorname{dn}\left(\dfrac{u}{M}, l\right) = \operatorname{dn} u \displaystyle\prod_{(r)} \frac{\operatorname{dn}(u + a_{r,0})}{\operatorname{dn} a_{r,0}}. \end{cases}$$

340. Dans ces diverses formules, r doit prendre les valeurs r_1, $r_2, \ldots, r_{n-1}$; on les transforme aisément en supposant qu'il prenne les valeurs

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}, \quad -r_1, -r_2, \ldots, -r_{\frac{n-1}{2}},$$

les divers produits qui figurent dans les seconds membres se présentent alors comme des fonctions rationnelles de $\operatorname{sn}^2 u$; en particulier pour $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$, le résultat auquel on parvient est naturellement le même que celui qui résulte immédiatement de la première des formules du n° 337, pour $\alpha = 3$, savoir :

$$(\text{LXXXVII}_4) \quad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{1}{M} \operatorname{sn} u \prod_{(r)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a_{r,0}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{r,0} \operatorname{sn}^2 u},$$
$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

On voit ici apparaître un phénomène analytique sur lequel nous avons appelé déjà plusieurs fois l'attention, y étant une fonction de u qui vérifie l'equation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2),$$

il existe une fonction rationnelle z de y qui vérifie l'équation différentielle

$$M^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = (1-z^2)(1-l^2u^2),$$

M et l étant des fonctions algébriques de k

On a de même

$$(\text{LXXXVII})\left\{\begin{aligned}&(5)\quad \text{cn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \text{cn}\,u\prod_{(r)}\frac{1-\dfrac{\text{dn}^2 a_{r,0}}{\text{cn}^2 a_{r,0}}\text{sn}^2 u}{1-k^2\,\text{sn}^2 a_{r,0}\,\text{sn}^2 u},\\ &(6)\quad \text{dn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \text{dn}\,u\prod_{(r)}\frac{1-k^2\dfrac{\text{cn}^2 a_{r,0}}{\text{dn}^2 a_{r,0}}\text{sn}^2 u}{1-k^2\,\text{sn}^2 a_{r,0}\,\text{sn}^2 u}.\\ &\qquad\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)\end{aligned}\right.$$

341. C'est des formules relatives aux fonctions ξ, ou plutôt aux fonctions σ, que nous avons déduit les formules de transformation des fonctions sn, cn, dn; il va de soi qu'on aurait pu partir tout aussi bien des formules de transformation relatives aux fonctions ϑ, nous ferons même observer que ce mode de calcul, que nous laissons au lecteur le soin de développer, présente, relativement au calcul des modules transformés l, l', un avantage : il permet d'obtenir $\sqrt{l}$, $\sqrt{l'}$, avec leur signe; on a en effet, par définition,

$$\sqrt{l} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,n\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,n\tau)}, \qquad \sqrt{l'} = \frac{\vartheta_4(0\,|\,n\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,n\tau)},$$

et par conséquent (LI_4)

$$\sqrt{l} = (-1)^{\sum'_{(r)}}\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\prod_{(r)}\frac{\vartheta_2\left(\dfrac{r}{n}\right)}{\vartheta_3\left(\dfrac{r}{n}\right)},$$

$$\sqrt{l'} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}\prod_{(r)}\frac{\vartheta_4\left(\dfrac{r}{n}\right)}{\vartheta_3\left(\dfrac{r}{n}\right)},$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

ou

$$(\text{LXXXVI}_3) \qquad \sqrt{l} = (-1)^{\sum_{(r)} r} (\sqrt{k})^n \prod_{(r)} \frac{\operatorname{cn} a_{r,0}}{\operatorname{dn} a_{r,0}},$$

$$(\text{LXXXVI}_4) \qquad \sqrt{l'} = (\sqrt{k'})^n \prod_{(r)} \frac{1}{\operatorname{dn} a_{r,0}}, \qquad (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

En se reportant à la valeur de M, on trouve enfin

$$\frac{1}{M} = \frac{(\sqrt{k})^n}{\sqrt{l}} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sn}^2 a_{r,0} = \frac{(\sqrt{k})^n}{\sqrt{l}} \prod_{(r)} \operatorname{sn}^2 a_{r,0},$$
$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right).$$

342. Les fonctions $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$ s'expriment aussi par des sommes de fonctions sn, cn, dn, dont le module est k Nous parviendrons plus tard à ces expressions par une voie très simple et presque sans calculs; mais il est intéressant d'observer qu'on peut les déduire, dès maintenant, des formules (LXXXVII_{1-6}) en décomposant en fractions simples les fonctions rationnelles, regardées comme des polynomes en $\operatorname{sn}^2(u, k)$, qui représentent les fonctions

$$\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right)}{\operatorname{sn} u}, \quad \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, l\right)}{\operatorname{cn} u}, \quad \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, l\right)}{\operatorname{dn} u}$$

Le dénominateur commun de ces fonctions rationnelles de $\operatorname{sn}^2(u, k)$ n'a que des racines simples, comme on le reconnaîtra facilement en se reportant au n° 310. On a donc

$$\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right)}{\operatorname{sn} u} = \prod_{(r)} \frac{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a_{r,0}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a_{r,0}} = A + \sum_{(r)} \frac{B_r}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a_{r,0}},$$
$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Le calcul des coefficients B_r se fait d'après les règles ordinaires,

on trouve ([1])

$$(-1)^r B_r = \frac{2kM^2}{l}\operatorname{cn} a_{r,0} \operatorname{dn} a_{r,0},$$

puis, en tenant compte de la dernière forme sous laquelle on a mis M,

$$\Lambda = \frac{kM^2}{l}.$$

En faisant usage de la formule d'addition ($LXXIII_4$) et après quelques réductions immédiates, on a enfin

$$(LXXXVII_7) \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{kM}{l}\sum_{(r)} \operatorname{sn}(u + 2a_{r,0}),$$

$$(r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}).$$

343. On parvient au même résultat en observant que la relation ($LXXXVII_4$), que l'on peut écrire, en posant $x = \operatorname{sn}(u, k)$ et $y = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$,

$$(1) \qquad x\prod_{(r)}\left(\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 a_{r,0}} - 1\right) - My\prod_{(r)}(x^2 k^2 \operatorname{sn}^2 a_{r,0} - 1) = 0,$$

a lieu identiquement en u et τ. Or, si l'on change dans cette relation u en $u + 2a_{r,0}$, où r désigne l'un des entiers $1, 2, \ldots, n-1$, la quantité $\frac{u}{M}$ est remplacée par $\frac{u}{M} + 4rL$, donc l'expression

$$y = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$$

ne change pas. La relation (1), envisagée comme une équation de degré n en x, admet donc les n racines

$$x = \operatorname{sn}(u + 2a_{r,0}), \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

ces n racines sont distinctes. on le déduit aisément de la forme générale des solutions de l'équation $\operatorname{sn} x = \operatorname{sn}\alpha$ (n° 310), on a, par suite, identiquement en x,

$$x\prod_{(r)}(x^2 - \operatorname{sn}^2 a_{r,0}) - My\prod_{(r)}\operatorname{sn}^2 a_{r,0}\prod_{(r)}(x^2k^2\operatorname{sn}^2 a_{r,0} - 1)$$

$$= \prod_{r=0}^{n-1}[x - \operatorname{sn}(u + 2a_{r,0})]$$

---

[1] Les calculs sont développés dans Enneper *Elliptische Functionen*, p. 309.

En égalant les coefficients de x^{n-1} dans les deux membres, on donc

$$My\lambda^{n-1}\prod_{(r)} \text{sn}^4 a_{r,0} = \sum_{r=0}^{n-1} \text{sn}(u + 2a_{r,0}),$$

'où, en tenant compte de la valeur trouvée au n° 341 pour M,

$$y = \text{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{kM}{l}\sum_{r=0}^{n-1} \text{sn}(u + 2a_{r,0})$$

)n a donc aussi

$$\text{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{kM}{l}\sum_{(r)} \text{sn}(u + 2a_{r,0}),$$

$$(r = r_0, r_1, \quad , r_{n-1}).$$

De même, on a

$$\text{LXXXVII)}\begin{cases} (8) \quad \text{cn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{kM}{l}\sum_{(r)} \text{cn}(u + 2a_{r,0}), \\ (9) \quad \text{dn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = M\sum_{(r)} \text{dn}(u + 2a_{r,0}), \end{cases}$$

$$(r = r_0, r_1, \quad , r_{n-1}).$$

344. La substitution des demi-périodes $\left(\omega_1, \frac{\omega_3}{n}\right)$ aux demi-ériodes ω_1, ω_3 donne lieu à des formules toutes pareilles sur la éduction desquelles il semble inutile d'insister . nous désignerons ar E_1', E_2', E_3', λ, λ', Λ, Λ' les quantités qui remplacent alors e_1, $_2$, e_3, k, k', K, K'; nous poserons aussi

$$\sqrt{E_1' - E_2'} = \xi_{20}\left(\omega_1 \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{n}\right) = \frac{\pi}{2\omega_1}\mathfrak{S}_4^2\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right),$$

$$\sqrt{E_2' - E_3'} = \xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{n} + \omega_3 \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{n}\right) = -\frac{\pi}{2\omega_1}\mathfrak{S}_2^2\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right),$$

$$\sqrt{E_1' - E_3'} = \xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{n} \middle| \omega_1, \frac{\omega_3}{n}\right) = \frac{\pi}{2\omega_1}\mathfrak{S}_3^2\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right),$$

$$M = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{E_1' - E_3'}},$$

de sorte que l'on a

$$
\text{(LXXXVIII)}\quad
\begin{cases}
(1)\quad \lambda = -\dfrac{\sqrt{E'_2 - E'_3}}{\sqrt{E'_1 - E'_3}} = \dfrac{\vartheta_2^2\left(0\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(0\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right)}, \\[2ex]
(2)\quad \lambda' = \sqrt{\dfrac{E'_1 - E'_2}{E'_1 - E'_3}} = \dfrac{\vartheta_4^2\left(0\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(0\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right)},
\end{cases}
$$

$$
\text{(LXXXVIII)}\quad
\begin{cases}
(6)\quad \Lambda = \dfrac{\pi}{2}\vartheta_3^2\left(0\,\middle|\,\dfrac{\tau}{n}\right) = \omega_1\sqrt{E'_1 - E'_3} = \dfrac{K}{M}, \\[2ex]
(7)\quad \Lambda' = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{\tau}{i}\,\Lambda = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\omega_3}{n}\sqrt{E'_1 - E'_3} = \dfrac{K'}{nM}.
\end{cases}
$$

345. En ce qui concerne les fonctions ξ, citons les formules

$$
\xi_{0\alpha}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{n}\right) = \xi_{0\alpha}(u) \prod_{(r)} \frac{\xi_{0\alpha}\left(u + \dfrac{2r}{n}\,\omega_3\right)}{\xi_{0\alpha}\left(\dfrac{2r}{n}\,\omega_3\right)},
$$

$$
\xi_{\beta\gamma}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{n}\right) = \xi_{\beta\gamma}(u) \prod_{(r)} \frac{\xi_{\beta\gamma}\left(u + \dfrac{2r}{n}\,\omega_3\right)}{\xi_{\beta\gamma}\left(\dfrac{2r}{n}\,\omega_3\right)},
$$

$$
\xi_{0\alpha}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{n}\right) = \xi_{0\alpha}u \prod_{(r)} \frac{1 - \xi_{0\alpha}^2 u\, \xi_{\alpha 0}\left(\dfrac{2r}{n}\,\omega_3\right)}{1 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,\xi_{0\alpha}^2\left(\dfrac{2r}{n}\,\omega_3\right)\xi_{0\alpha}^2 u}.
$$

Observons aussi que la transformation qui consiste à diviser l'une des périodes par un nombre impair peut être combinée avec la transformation linéaire.

Par exemple, si l'on remarque que la substitution des demi-périodes $(\omega_1, \omega_3 + 2p\omega_1)$ aux demi-périodes (ω_1, ω_3) rentre manifestement dans le cas 1° du Tableau (XX_6) et que dans ce cas la suite des indices α, β, γ n'est pas altérée, on voit de suite qu'on a, quel que soit l'entier p,

$$
\xi_{0\alpha}\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3 + 2p\omega_1}{n}\right) = \xi_{0\alpha}(u) \prod_{(r)} \frac{\xi_{0\alpha}\left[u + \dfrac{2r(\omega_3 + 2p\omega_1)}{n}\right]}{\xi_{0\alpha}\left[\dfrac{2r(\omega_3 + 2p\omega_1)}{n}\right]}.
$$

346. Voici, d'autre part, les résultats auxquels on parvient en ce qui concerne $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda'}$, M et les fonctions $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$:

(LXXXVIII)

$$(3)\qquad \sqrt{\lambda} = (\sqrt{k})^n \prod_{(r)} \frac{\operatorname{cn} a_{0,r}}{\operatorname{dn} a_{0,r}},$$

$$(4)\qquad \sqrt{\lambda'} = (-1)^{\sum_{(r)} r} (\sqrt{k'})^n \prod_{(r)} \frac{1}{\operatorname{dn} a_{0,r}},$$

$$(5)\qquad M = \prod_{(r)} \frac{\operatorname{cn} a_{0,r}}{\operatorname{dn} a_{0,r} \operatorname{sn} a_{0,r}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{(\sqrt{k})^n} \prod_{(r)} \frac{1}{\operatorname{sn} a_{0,r}},$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

(LXXXIX)

$$(1)\qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{1}{M} \operatorname{sn} u \prod_{(r)} \frac{\operatorname{sn}(u + a_{0,r})}{\operatorname{sn} a_{0,r}},$$

$$(2)\qquad \operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \operatorname{cn} u \prod_{(r)} \frac{\operatorname{cn}(u + a_{0,r})}{\operatorname{cn} a_{0,r}},$$

$$(3)\qquad \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \operatorname{dn} u \prod_{(r)} \frac{\operatorname{dn}(u + a_{0,r})}{\operatorname{dn}(a_{0,r})},$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

(LXXXIX)

$$(4)\qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{1}{M} \operatorname{sn} u \prod_{(r)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a_{0,r}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u},$$

$$(5)\qquad \operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \operatorname{cn} u \prod_{(r)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{dn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 a_{0,r}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u},$$

$$(6)\qquad \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \operatorname{dn} u \prod_{(r)} \frac{1 - \dfrac{k^2 \operatorname{cn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 a_{0,r}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u},$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

(LXXXIX)

$$(7)\qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{kM}{\lambda} \sum_{(r)} \operatorname{sn}(u + 2a_{0,r}),$$

$$(8)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{kM}{\lambda} \sum_{(r)} \operatorname{cn}(u + 2a_{0,r}),$$

$$(9)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = M \sum_{(r)} \operatorname{dn}(u + 2a_{0,r}),$$

$$(r = r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}).$$

347. Les formules concernant la multiplication, par un nombre entier impair, de l'argument des fonctions elliptiques sn, cn, dn, peuvent être déduites de diverses manières des formules précédentes concernant la transformation de k en l et celle de k en λ. En tenant compte des formules (LXXI_{6-8}) et (LIV), on obtient, par de simples divisions, les relations

$$
(\mathrm{XC})\begin{cases}
(1)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{sn}(nu) = (-1)^{\sum_{(r)} r}\,(\sqrt{k})^{n^2-1}\displaystyle\prod_{(\mu,\nu)}\mathrm{sn}(u+a_{\mu,\nu}),\\[2ex]
(2)\quad \mathrm{cn}(nu) = \left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{k'}}\right)^{n^2-1}\displaystyle\prod_{(\mu,\nu)}\mathrm{cn}(u+a_{\mu,\nu}),\\[2ex]
(3)\quad \mathrm{dn}(nu) = (-1)^{\sum_{(r)} r}\,\dfrac{1}{(\sqrt{k'})^{n^2-1}}\displaystyle\prod_{(\mu,\nu)}\mathrm{dn}(u+a_{\mu,\nu}),
\end{cases}
$$

où les indices r, μ, ν parcourent les valeurs

$$
\begin{aligned}
r &= r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{n-1},\\
\mu &= 0,\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{n-1},\\
\nu &= 0,\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{n-1}.
\end{aligned}
$$

On peut mettre ces relations sous une forme où ne figure pas le facteur $(-1)^{\sum_{(r)} r}$. Il suffit pour cela de prendre, par exemple, pour le système de nombres $0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ le système de nombres $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}$. Mais on parvient aussi à ce résultat en prenant, pour le système de nombres $0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, le système de nombres $0, 2, 4, \ldots, 2(n-1)$, on voit aisément que l'on a alors

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{sn}(nu) = (\sqrt{\lambda})^{n^2-1}\prod_{(\mu,\nu)}\mathrm{sn}(u+2a_{\mu,\nu}),$$

$$\mathrm{cn}(nu) = \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{k'}}\right)^{n^2-1}\prod_{(\mu,\nu)}\mathrm{cn}(u+2a_{\mu,\nu}),$$

$$\mathrm{dn}(nu) = \left(\frac{1}{\sqrt{k'}}\right)^{n^2-1}\prod_{(\mu,\nu)}\mathrm{dn}(u+2a_{\mu,\nu}),$$

où les indices μ, ν parcourent les valeurs $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Les seconds membres de ces dernières formules ne changent pas quand on y remplace μ par $\mu + n$ ou ν par $\nu + n$; ces égalités restent donc vraies quand les indices μ et ν parcourent les valeurs $\mu = r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, $\nu = r'_0, r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n-1}$, les n valeurs que prend μ étant incongrues (mod. n), de même que les n valeurs que prend ν.

Le lecteur ne manquera pas de remarquer que l'on aurait pu se débarrasser de la même façon du facteur $(-1)^{\sum_{(r)} r}$ dans plusieurs des formules précédentes.

348. Pour obtenir les expressions de $\operatorname{sn}(nu)$, $\operatorname{cn}(nu)$, $\operatorname{dn}(nu)$ en fonctions rationnelles de $\operatorname{sn}^2 u$, il suffit de prendre, dans les formules (XC_{1-3}), pour les nombres $0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, les nombres $0, \pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_{\frac{n-1}{2}}$ et d'appliquer les formules (LXXIV). On obtient ainsi, pour la fonction sn, la relation

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{sn}(nu)}{\operatorname{sn}(u)} = (\sqrt{k})^{n^2-1} \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu} \prod_{(\mu,\nu)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u},$$

où l'indice μ prend les valeurs $0, r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$ et où, à la valeur $\mu = 0$, correspondent les valeurs $\nu = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$, tandis qu'aux valeurs $\mu = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}$ correspondent les valeurs $\nu = 0, \pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_{\frac{n-1}{2}}$.

Pour $u = 0$, on en déduit l'égalité

$$(XC_7) \qquad \frac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(\sqrt{k})^{n^2-1}} = \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu},$$

on a donc

$$(XC_4) \qquad \operatorname{sn}(nu) = n \operatorname{sn} u \prod_{(\mu,\nu)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u}.$$

On a de même, par un calcul tout semblable (¹),

$$(\text{XC}_3)\qquad \left(\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\right)^{n^2-1} = \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{cn}^2 a_{\mu,\nu},$$

$$(\text{XC}_5)\qquad \operatorname{cn}(nu) = \operatorname{cn} u \prod_{(\mu,\nu)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{dn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 a_{\mu,\nu}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u}$$

et

$$(\text{XC}_9)\qquad (\sqrt{k'})^{n^2-1} = \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{dn}^2 a_{\mu,\nu},$$

$$(\text{XC}_6)\qquad \operatorname{dn}(nu) = \operatorname{dn} u \prod_{(\mu,\nu)} \frac{1 - \dfrac{k^2 \operatorname{cn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 a_{\mu,\nu}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \mu = 0, & \nu = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}} \\ \mu = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}, & \nu = 0, \pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_{\frac{n-1}{2}} \end{array}\right).$$

349. En remplaçant, dans la formule (LXXXVII_7), τ par $\dfrac{\tau}{n}$, les quantités k, K, l, L se changent en λ, Λ, k, K, cette formule deviendra donc

$$\frac{nk\text{K}}{\lambda\Lambda} \operatorname{sn}\left(n\frac{u\text{K}}{\Lambda}, k\right) = \sum_{(r)} \operatorname{sn}\left(u + \frac{4r\Lambda}{n}, \lambda\right)$$
$$(r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}),$$

d'où, en remplaçant $\dfrac{u\text{K}}{\Lambda}$ par u,

$$\frac{nk\text{K}}{\lambda\Lambda} \operatorname{sn}(u, k) = \sum_{(r)} \operatorname{sn}\left[\frac{\Lambda}{\text{K}}\left(u + \frac{4r\text{K}}{n}\right), \lambda\right]$$

D'autre part, la formule (LXXXIX_7) donne, en y remplaçant u par $u + \dfrac{4r\text{K}}{n}$,

$$\operatorname{sn}\left[\frac{\Lambda}{\text{K}}\left(u + \frac{4r\text{K}}{n}\right), \lambda\right] = \frac{k\text{K}}{\lambda\Lambda} \sum_{(s)} \operatorname{sn}\left(u + \frac{4r\text{K}}{n} + \frac{4si\text{K}'}{n}\right)$$
$$(s = s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$$

(¹) Ce sont les formules mêmes de Jacobi (*Œuvres*, t. I, p. 121).

On a donc finalement [1]

$$(\mathrm{XC}_{10}) \qquad n\,\mathrm{sn}(nu) = \sum_{(r)} \sum_{(s)} \mathrm{sn}(u + 2a_{r,s})$$

De même

$$(\mathrm{XC}) \left\{ \begin{aligned} &(11) \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\,\mathrm{cn}(nu) = \sum_{(r)} \sum_{(s)} \mathrm{cn}(u + 2a_{r,s}), \\ &(12) \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\,\mathrm{dn}(nu) = \sum_{(r)} \sum_{(s)} \mathrm{dn}(u + 2a_{r,s}), \\ &\qquad (r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, \quad s = s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) \end{aligned} \right.$$

350. Si l'on pose

$$\mathrm{sn}\,u = x, \qquad \mathrm{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = y,$$

on a

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)},$$

$$\frac{M\,dy}{du} = \sqrt{(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2)}$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Cette équation différentielle est donc vérifiée identiquement en x, quel que soit τ, si l'on y remplace y par la fonction rationnelle de x, que l'on obtient en faisant $\mathrm{sn}\,u = x$ dans le second membre de la formule (LXXXIX_4) et λ, M par les expressions ($\mathrm{LXXXVIII}_{3,5}$).

Observons aussi que si l'on change τ en $\tau + 2m$, où m désigne un nombre entier quelconque, q ne change pas, tandis que $q^{\frac{1}{n}}$ devient $e^{\frac{2m\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}$; $k^2 = \varphi^8(\tau)$, $k' = \psi^4(\tau)$ ne changent pas, non plus que $\mathrm{K} = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0 \mid \tau)$; $i\mathrm{K}' = \tau\mathrm{K}$ est remplacée par

$$(\tau + 2m)\mathrm{K} = i\mathrm{K}' + 2m\mathrm{K},$$

---

[1] Comparez ABEL, *Œuvres*, t. I, p. 318.

de sorte que $a_{\mu,\nu}$ devient $a_{\mu+2m,\nu}$; $\sqrt[4]{k}=\varphi(\tau)$ est remplacée par $\varphi(\tau+2)=\sqrt{i}\sqrt[4]{k}$, les quantités λ, Λ, M sont remplacées par λ_m, Λ_m, M_m, où

$$\sqrt{\lambda_m}=\varphi^2\left(\frac{\tau+2m}{n}\right)=\frac{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau+2m}{n}\right)}{\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau+2m}{n}\right)},$$

$$\Lambda_m=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau+2m}{n}\right),$$

$$M_m=\frac{\Lambda_m}{n\mathrm{K}}.$$

La substitution de $\tau+2m$ à τ change d'ailleurs les seconds membres des relations ($\mathrm{LXXXVIII}_{3,5}$), et l'on a

$$\sqrt{\lambda_m}=i^{mn}(\sqrt{k})^n\prod_{(r)}\frac{\operatorname{cn}a_{2m,r}}{\operatorname{dn}a_{2m,r}},$$

$$M_m=\prod_{(r)}\frac{\operatorname{cn}a_{2m,r}}{\operatorname{dn}a_{2m,r}\operatorname{sn}a_{2m,r}}=\frac{\sqrt{\lambda_m}}{i^{mn}(\sqrt{k})^n}\prod_{(r)}\frac{1}{\operatorname{sn}a_{2m,r}}$$
$$(r=r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}).$$

La relation (LXXXIX_4) est remplacée par la suivante

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M_m},\lambda_m\right)=\frac{1}{M_m}\operatorname{sn}u\prod_{(r)}\frac{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{sn}^2a_{2m,r}}}{1-k^2\operatorname{sn}^2a_{2m,r}\operatorname{sn}^2u}$$
$$\left(r=r_1,r_2,\ldots,r_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

puisque le changement de τ en $\tau+2$ (qui change k en $-k$) n'altère pas

$$\operatorname{sn}(u,k)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right)}.$$

Mais, si l'on pose

$$\operatorname{sn}(u,k)=x,\qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M_m},\lambda_m\right)=y_m,$$

on a

$$\frac{M_m\,dy_m}{du}=\sqrt{(1-y_m^2)(1-\lambda_m^2y_m^2)}$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy_m}{\sqrt{(1-y_m^2)(1-\lambda_m^2 y_m^2)}} = \frac{dx}{M_m\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Ainsi, si l'on se donne un entier positif impair quelconque n, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{\mathrm{M}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

est vérifiée identiquement en x, si l'on y remplace y par une quelconque des n fonctions de x, que l'on obtient en donnant à m les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, dans le second membre de l'équation

$$y = \frac{x}{\mathrm{M}}\prod_{(r)}\frac{1-\dfrac{x^2}{\operatorname{sn}^2 a_{2m,r}}}{1-x^2k^2\operatorname{sn}^2 a_{2m,r}}$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

et $\sqrt{l}$, M par les expressions

$$\sqrt{l} = i^{mn}(\sqrt{k})^n\prod_{(r)}\frac{\operatorname{cn} a_{2m,r}}{\operatorname{dn} a_{2m,r}},$$

$$\mathrm{M} = \frac{\sqrt{l}}{i^{mn}(\sqrt{k})^n}\prod_{(r)}\frac{1}{\operatorname{sn} a_{2m,r}}$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

Elle est d'ailleurs aussi vérifiée identiquement en x si l'on y remplace y par l'expression

$$y = x\prod_{(r)}\frac{1-\dfrac{x^2}{\operatorname{sn}^2 a_{r,0}}}{1-x^2k^2\operatorname{sn}^2 a_{r,0}}$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

et $\sqrt{l}$, M par les expressions

$$\sqrt{l} = (\sqrt{k})^n\prod_{(r)}\frac{\operatorname{cn} a_{r,0}}{\operatorname{dn} a_{r,0}}$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}),$$

$$M = \frac{\sqrt{l}}{(\sqrt{k})^n} \prod_{(r)} \frac{1}{\mathrm{sn}^2 a_{r,0}}$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

de sorte que, pour chaque entier positif impair donné n, nous connaissons $n+1$ solutions rationnelles de l'équation différentielle précédente

La quantité τ ne figure pas explicitement dans cette équation différentielle. On a annoncé, au n° 338, que l et M sont des fonctions algébriques de k; la même assertion s'applique aux quantités λ, M et aux quantités λ_m, M_m, en sorte que l'on peut dire que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

doit être aussi bien vérifiée identiquement en x et quelle que soit la quantité k, à condition que l'on prenne pour l et M des fonctions algébriques convenables de k. D'ailleurs, les $n+1$ solutions rationnelles de cette équation différentielle, solutions dont on vient d'indiquer la formation, dépendent manifestement de l'entier positif n.

Le lecteur ne peut manquer de pressentir l'importance du sujet que nous ne faisons qu'effleurer ici et sur lequel nous reviendrons plus tard.

FORMULES.

FORMULES.

I.

(1) $$\sin \pi u = \pi u \prod_n^{(\prime)} \left\{ \left(1 - \frac{u}{n} \right) e^{\frac{u}{n}} \right\},$$

(2) $$\pi \cot \pi u = \frac{1}{u} + \sum_n^{(\prime)} \left\{ \frac{1}{u-n} + \frac{1}{n} \right\},$$

(3) $$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi u} = \sum_n \frac{1}{(u-n)^2},$$

(4) $$\prod_n \left\{ \left(1 - \frac{u}{n-a} \right) e^{\frac{u}{n-a}} \right\} = \frac{\sin \pi (u+a)}{\sin \pi a} e^{-u\pi \cot \pi a},$$

(5) $$\sum_n \left\{ \frac{1}{u+a-n} + \frac{1}{n-a} \right\} = \pi [\cot \pi (u+a) - \cot \pi a].$$

II.

(1) $$\sigma u = u \prod_s^{(\prime)} \left\{ \left(1 - \frac{u}{s} \right) e^{\frac{u}{s} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{s^2}} \right\},$$

(2) $$\zeta(u) = \frac{d}{du} \log \sigma u = \frac{1}{u} + \sum_s^{(\prime)} \left\{ \frac{1}{u-s} + \frac{1}{s} + \frac{u}{s^2} \right\},$$

(3) $$\wp u = -\zeta' u = -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma u = \frac{1}{u^2} + \sum_s^{(\prime)} \left\{ \frac{1}{(u-s)^2} - \frac{1}{s^2} \right\},$$

(4) $$-\frac{1}{2} \wp' u = \sum_s \frac{1}{(u-s)^3},$$

(5) $$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(-u) = -\sigma u, & \wp(-u) = \wp u, \\ \zeta(-u) = -\zeta u, & \wp^{(n)}(-u) = (-1)^n \wp^{(n)} u \end{array} \right.$$

III.

(1) $$\sigma(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \lambda\, \sigma(u \mid \omega_1, \omega_3),$$

(2) $$\zeta(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \frac{1}{\lambda}\, \zeta(u \mid \omega_1, \omega_3),$$

(3) $$\wp(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \frac{1}{\lambda^2} \wp(u \mid \omega_1, \omega_3),$$

(4) $$\wp^{(n)}(\lambda u \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \frac{1}{\lambda^{n+2}} \wp^{(n)}(u \mid \omega_1, \omega_3).$$

IV.

$$(1)\qquad \sigma u = u - \frac{1}{4} u^5 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} - \frac{1}{6} u^7 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} - \ldots,$$

$$(2)\qquad \zeta u = \frac{1}{u} - u^3 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} - u^5 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} - u^7 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^8} - \ldots,$$

$$(3)\qquad \wp u = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} + 5u^4 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} + \ldots,$$

$$(4)\qquad \wp' u = -\frac{2}{u^3} + 6u \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^4} + 20u^3 \sum_s^{(\prime)} \frac{1}{s^6} + \ldots,$$

$$(5)\qquad \begin{cases} g_2 = 60 \sum_s^{(\prime)} \dfrac{1}{s^4}, \qquad g_3 = 140 \sum_s^{(\prime)} \dfrac{1}{s^6}, \\ g_2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \lambda^{-4} g_2(\omega_1, \omega_3), \qquad g_3(\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \lambda^{-6} g_3(\omega_1, \omega_3) \end{cases}$$

V.

$$(1)\qquad \frac{\sigma(u+a)}{\sigma(a)} e^{-u\zeta a + \frac{u^2}{2}\wp a} = \prod_s \left\{ \left(1 - \frac{u}{s-a}\right) e^{\frac{u}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-a)^2}} \right\},$$

$$(2)\qquad \zeta(u+a) - \zeta a + u\wp a = \sum_s \left\{ \frac{1}{u+a-s} - \frac{1}{a-s} + \frac{u}{(a-s)^2} \right\},$$

$$(3)\qquad \wp(u+a) - \wp a = \sum_s \left\{ \frac{1}{(u+a-s)^2} - \frac{1}{(a-s)^2} \right\}.$$

VI.

$$(1)\qquad \begin{cases} \sigma(u+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)} \sigma u, \\ \sigma(u+2\omega_2) = -e^{2\eta_2(u+\omega_2)} \sigma u, \\ \sigma(u+2\omega_3) = -e^{2\eta_3(u+\omega_3)} \sigma u, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \sigma(u+2m\omega_1+2n\omega_3) = (-1)^{mn+m+n} e^{(2m\eta_1+2n\eta_3)(u+m\omega_1+n\omega_3)} \sigma u,$$

$$(3)\qquad \zeta(u+2m\omega_1+2n\omega_3) = \zeta u + 2m\eta_1 + 2n\eta_3,$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \zeta\omega_1 = \eta_1, \qquad \zeta\omega_2 = \eta_2, \qquad \zeta\omega_3 = \eta_3, \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \wp(u+2m\omega_1+2n\omega_3) = \wp u,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \wp'(u+2m\omega_1+2n\omega_3) = \wp' u, \\ \wp'\omega_1 = 0, \qquad \wp'\omega_2 = 0, \qquad \wp'\omega_3 = 0. \end{cases}$$

Dans toutes les formules qui suivent, α β, γ sont les trois nombres 1, 2, 3 *rangés dans un ordre quelconque.*

VII.

(1) $$pu - pa = -\frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 a},$$

(2) $$\left\{\begin{aligned} &\sigma(u+a)\sigma(u-a)\sigma(b+c)\sigma(b-c)\\ &+\sigma(u+b)\sigma(u-b)\sigma(c+a)\sigma(c-a)\\ &+\sigma(u+c)\sigma(u-c)\sigma(a+b)\sigma(a-b) = 0,\end{aligned}\right.$$

(3) $$\left\{\begin{aligned} &\zeta(u\pm a) = \zeta(u) \pm \zeta a + \frac{1}{2}\,\frac{p'u \mp p'a}{pu - pa},\\ &p(u\pm a) = pu - \frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\left[\frac{p'u \mp p'a}{pu - pa}\right],\end{aligned}\right.$$

(4) $$\left\{\begin{aligned} &p\omega_1 = e_1, \qquad p\omega_2 = e_2, \qquad p\omega_3 = e_3,\\ &\qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0,\end{aligned}\right.$$

(5) $$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3),$$

(6) $$\left\{\begin{aligned} &p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,\\ &\quad g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)\\ &\qquad = 12e_\alpha^2 - 4(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) = 4(e_\alpha^2 - e_\beta e_\gamma),\\ &\quad g_3 = 4e_1e_2e_3.\end{aligned}\right.$$

(7) $$p''u = 6p^2 u - \frac{g_2}{2},$$

(8) $$p'''u = 12\, pu\, p'u$$

(9) $$\left\{\begin{aligned} &\zeta(u\pm\omega_\alpha) = \zeta u \pm \eta_\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - e_\alpha},\\ &p(u\pm\omega_\alpha) = e_\alpha + \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{pu - e_\alpha}.\end{aligned}\right.$$

VIII.

(1) $$\sigma\left(\lambda u, \frac{g_2}{\lambda^4}, \frac{g_3}{\lambda^6}\right) = \lambda\,\sigma(u; g_2, g_3),$$

(2) $$\zeta\left(\lambda u, \frac{g_2}{\lambda^4}, \frac{g_3}{\lambda^6}\right) = \frac{1}{\lambda}\,\zeta(u, g_2, g_3),$$

(3) $$p\left(\lambda u, \frac{g_2}{\lambda^4}, \frac{g_3}{\lambda^6}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\,p(u, g_2, g_3),$$

(4) $$p^{(n)}\left(\lambda u, \frac{g^2}{\lambda^4}, \frac{g_3}{\lambda^6}\right) = \frac{1}{\lambda^{n+2}}\,p^{(n)}(u, g_2, g_3).$$

IX.

$$\sigma u = u - \frac{g_2 u^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3 u^7}{2^3.3.5.7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9.3^2.5.7} + \dots,$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{2^2.3.5} - \frac{g_3 u^5}{2^2.5.7} - \frac{g_2^2 u^7}{2^4.3.5^2.7} + \dots,$$

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{2^2.5} + \frac{g_3 u^4}{2^2.7} + \frac{g_2^2 u^6}{2^4.3.5^2} + \dots.$$

X.

$$\sigma u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{2\omega_1}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[1 - \frac{\sin^2 \pi \frac{u}{2\omega_1}}{\sin^2 \pi \frac{n\omega_3}{\omega_1}} \right],$$

$$\zeta u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \sum_n{}' \left\{ \cot \pi \frac{u - 2n\omega_3}{2\omega_1} + \cot \pi \frac{n\omega_3}{\omega_1} \right\},$$

$$pu = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \sum_n \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{u - 2n\omega_3}{2\omega_1}},$$

$$= \frac{\pi^2}{2\omega_1} \left[\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{n\omega_3}{\omega_1}} \right], \qquad (5) \qquad \eta_3 = \frac{\pi^2}{2\omega_3} \left[\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{n\omega_1}{\omega_3}} \right],$$

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \pm \frac{\pi}{2} i.$$

XI.

$$\sigma_\alpha u = \frac{e^{-\eta_\alpha u} \sigma(u + \omega_\alpha)}{\sigma \omega_\alpha} = \frac{e^{\eta_\alpha u} \sigma(\omega_\alpha - u)}{\sigma \omega_\alpha} = \sigma_\alpha(-u),$$

$$\zeta_\alpha u = \zeta(u + \omega_\alpha) - \eta_\alpha = -\zeta_\alpha(-u),$$

$$\sigma(2u) = 2\sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u = -p'u\, \sigma^4 u,$$

$$pu - e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u},$$

$$\sqrt{pu - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}, \qquad (6) \qquad \sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha \omega_\beta}{\sigma \omega_\beta},$$

$$\sigma_\alpha u = 1 - \frac{e_\alpha}{2} u^2 + \frac{1}{48}(g_2 - 6e_\alpha^2) u^4 + \dots.$$

XII.

$$(1)\qquad \sigma(0)=0,\qquad \sigma_\alpha\omega_\alpha=0,\qquad \sigma_\alpha\omega_\beta=-\,e^{-\eta_\alpha\omega_\beta}\frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha},$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sigma\,(u+2\omega_\alpha)=-\,e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\,\sigma u,\\
&\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha)=-\,e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\,\sigma_\alpha u,\\
&\sigma_\beta(u+2\omega_\alpha)=+\,e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\,\sigma_\beta u,\\
&\sigma(u+2m\omega_\alpha+2n\omega_\beta+2r\omega_\gamma)\\
&\quad=(-1)^{nr+rm+mn+m+n+r}\,e^{2(m\eta_\alpha+n\eta_\beta+r\eta_\gamma)(u+m\omega_\alpha+n\omega_\beta+r\omega_\gamma)}\,\sigma u,\\
&\sigma_\alpha(u+2m\omega_\alpha+2n\omega_\beta+2r\omega_\gamma)\\
&\quad=(-1)^{nr+rm+mn+m}\,e^{2(m\eta_\alpha+n\eta_\beta+r\eta_\gamma)(u+m\omega_\alpha+n\omega_\beta+r\omega_\gamma)}\,\sigma_\alpha u,
\end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sigma\,(u\pm\omega_\alpha)=\pm\,e^{\pm\eta_\alpha u}\,\sigma\omega_\alpha\,\sigma_\alpha u,\\
&\sigma_\alpha(u\pm\omega_\alpha)=\mp\,e^{\pm\eta_\alpha u}\,\frac{\sigma_\beta\omega_\alpha\,\sigma_\gamma\omega_\alpha}{\sigma\omega_\alpha}\,\sigma u,\\
&\sigma_\beta(u\pm\omega_\alpha)=e^{\pm\eta_\alpha u}\,\sigma_\beta\omega_\alpha\,\sigma_\gamma u,
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \zeta(u+2\omega_\alpha)=\zeta u+2\eta_\alpha,\qquad \zeta_\alpha(u+2\omega_\alpha)=\zeta_\alpha u+2\eta_\alpha,\qquad \zeta_\alpha(u+2\omega_\beta)=\zeta_\alpha u+2\eta_\beta,$$

$$(5)\qquad \zeta(u\pm\omega_\alpha)=\zeta_\alpha u\pm\eta_\alpha,\qquad \zeta_\alpha(u\pm\omega_\alpha)=\zeta u\pm\eta_\alpha,\qquad \zeta_\alpha(u\pm\omega_\beta)=\zeta_\gamma u\pm\eta_\beta,$$

$$(6)\qquad e^{\eta_\alpha\omega_\alpha}=\sigma_\beta\omega_\alpha\,\sigma_\gamma\omega_\alpha,\qquad e^{\eta_\beta\omega_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha\omega_\gamma}{\sigma_\alpha\omega_\beta\,\sigma_\gamma\omega_\alpha}=\frac{-\,\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\beta\,\sigma_\beta\omega_\alpha}.$$

XIII.

$$(1)\qquad \sqrt{e_\alpha-e_\beta}=-\,e^{-\eta_\beta\omega_\alpha}\frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta},$$

$$(2)\qquad e^{\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha}=\frac{\sqrt{e_\alpha-e_\beta}}{\sqrt{e_\beta-e_\alpha}},\qquad \sqrt{e_\alpha-e_\beta}\,\sqrt{e_\alpha-e_\gamma}=\sqrt{e_\beta-e_\alpha}\,\sqrt{e_\gamma-e_\alpha},$$

$$(3)\qquad \eta_3\omega_2-\eta_2\omega_3=\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2=\frac{\pi i}{2},$$

$$(4)\qquad \sqrt{e_3-e_2}=i\sqrt{e_2-e_3},\qquad \sqrt{e_3-e_1}=-\,i\sqrt{e_1-e_3},\qquad \sqrt{e_2-e_1}=i\sqrt{e_1-e_2},$$

si la pa
réelle de
est posit

XIV.

$$(1)\qquad \sigma_\alpha^2 u-\sigma_\beta^2 u=(e_\beta-e_\alpha)\,\sigma^2 u,$$

$$(2)\qquad (e_\gamma-e_\beta)\,\sigma_\alpha^2 u+(e_\alpha-e_\gamma)\,\sigma_\beta^2 u+(e_\beta-e_\alpha)\,\sigma_\gamma^2 u=0$$

XV.

$$(1)\qquad \sigma(u+a)\sigma(u-a)=\sigma^2 u\,\sigma_\alpha^2 a-\sigma_\alpha^2 u\,\sigma^2 a,$$

$$(2)\qquad \sigma_\alpha(u+a)\sigma_\alpha(u-a)=\sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\alpha^2 a-(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\sigma^2 u\,\sigma^2 a.$$

$$(3)\qquad \sigma_\alpha(u+a)\sigma_\alpha(u-a)=\sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\beta^2 a-(e_\alpha-e_\beta)\sigma^2 a\,\sigma_\gamma^2 u,$$

$$(4)\qquad \sigma_\alpha(u+a)\sigma(u-a)=\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta a\,\sigma_\gamma a-\sigma a\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u,$$

$$(5)\qquad \sigma_\gamma(u+a)\sigma_\beta(u-a)=\sigma_\gamma u\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma a\,\sigma_\beta a+(e_\beta-e_\gamma)\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma a\,\sigma_\alpha a$$

XVI.

$$(1)\qquad \mathrm{p}\frac{u}{2}=\mathrm{p}u+\sqrt{\mathrm{p}u-e_\beta}\sqrt{\mathrm{p}u-e_\gamma}+\sqrt{\mathrm{p}u-e_\gamma}\sqrt{\mathrm{p}u-e_\alpha}+\sqrt{\mathrm{p}u-e_\alpha}\sqrt{\mathrm{p}u-e_\beta},$$

$$(2)\qquad \mathrm{p}\frac{\omega_\alpha}{2}=e_\alpha+\sqrt{e_\alpha-e_\beta}\sqrt{e_\alpha-e_\gamma}$$

XVII.

$$(1)\qquad \sigma_\alpha u=e^{-\frac{u^2}{2}\mathrm{p}\omega_\alpha}\prod_s\left\{\left(1-\frac{u}{s-\omega_\alpha}\right)e^{\frac{u}{s-\omega_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(s-\omega_\alpha)^2}}\right\},$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \eta_1+\omega_1\mathrm{p}\omega_1=\dfrac{\pi^2}{4\omega_1}\left(1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\cos^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\right), \\[2ex] \eta_1+\omega_1\mathrm{p}\omega_2=\dfrac{\pi^2}{2\omega_1}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\cos^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}}, \\[2ex] \eta_1+\omega_1\mathrm{p}\omega_3=\dfrac{\pi^2}{2\omega_1}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}}, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \sigma_1 u=e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\cos\frac{\pi u}{2\omega_1}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\cos^2\pi\dfrac{n\omega_3}{\omega_1}}\right],$$

$$(4)\qquad \sigma_2 u=e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\cos^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}}\right],$$

$$(5)\qquad \sigma_3 u=e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\dfrac{\pi u}{2\omega_1}}{\sin^2\pi\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\omega_3}{\omega_1}}\right].$$

XVIII.

(1) $$\omega'_\alpha = \lambda\omega_\alpha, \qquad \eta'_\alpha = \frac{\eta_\alpha}{\lambda}, \qquad e'_\alpha = \frac{e_\alpha}{\lambda^2},$$

(2) $$\left\{\begin{aligned} \sigma(u\,|\,\omega'_1, \omega'_3) &= \lambda\ \sigma\left(\frac{u}{\lambda}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right), \\ \zeta(u\,|\,\omega'_1, \omega'_3) &= \frac{1}{\lambda}\ \zeta\left(\frac{u}{\lambda}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right), \\ p(u\,|\,\omega'_1, \omega'_3) &= \frac{1}{\lambda^2}\, p\left(\frac{u}{\lambda}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right), \end{aligned}\right.$$

(3) $$\sigma_\alpha(u\,|\,\omega'_1, \omega'_3) = \sigma_\alpha\left(\frac{u}{\lambda}\middle|\,\omega_1, \omega_3\right),$$

(4) $$\sqrt{e'_\alpha - e'_\beta} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{e_\alpha - e_\beta}.$$

XIX.

(1) $$\left\{\begin{aligned} &\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_3, \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3, \qquad \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0, \\ &\qquad ad - bc = \pm 1, \end{aligned}\right.$$

(2) $$\sigma(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) = \sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_3),$$

(3) $$\zeta(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) = \zeta(u\,|\,\omega_1, \omega_3),$$

(4) $$p(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) = p(u\,|\,\omega_1, \omega_3).$$

XX.

(1) $$\left\{\begin{aligned} &H_1 = \zeta\Omega_1, \qquad H_2 = \zeta\Omega_2, \qquad H_3 = \zeta\Omega_3, \\ &H_1 = a\eta_1 + b\eta_3, \qquad H_3 = c\eta_1 + d\eta_3. \end{aligned}\right.$$

(2) $$H_1 + H_2 + H_3 = 0,$$

(3) $$H_1\Omega_3 - H_3\Omega_1 = \pm\frac{\pi i}{2},$$

(4) $$\left\{\begin{aligned} &p\omega_1 = e_1, \qquad p\omega_2 = e_2, \qquad p\omega_3 = e_3, \\ &p\Omega_1 = E_1 = e_\lambda, \quad p\Omega_2 = E_2 = e_\mu, \quad p\Omega_3 = E_3 = e_\nu \end{aligned}\right.$$

(5) $$\left\{\begin{aligned} \sigma_1(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) &= \sigma_\lambda(u\,|\,\omega_1, \omega_3), \\ \sigma_2(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) &= \sigma_\mu(u\,|\,\omega_1, \omega_3), \\ \sigma_3(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) &= \sigma_\nu(u\,|\,\omega_1, \omega_3) \end{aligned}\right.$$

XX (FIN).

(6)

	a	b	c	d	Ω_1	Ω_2	Ω_3	λ	μ	ν
1°	1	0	0	1	ω_1	ω_2	ω_3	1	2	3
2°	1	0	1	1	ω_1	ω_3	ω_2	1	3	2
3°	1	1	0	1	ω_2	ω_1	ω_3	2	1	3
4°	1	1	1	0	ω_2	ω_3	ω_1	2	3	1
5°	0	1	1	0	ω_3	ω_2	ω_1	3	2	1
6°	0	1	1	1	ω_3	ω_1	ω_2	3	1	2

(7)

$$ad - bc = +1,$$

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{\pi i}{2}, \qquad \mathrm{H}_1 \Omega_3 - \mathrm{H}_3 \Omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

	$\sqrt{\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_3}$	$\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3}$	$\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2}$
1°	$(-1)^{\frac{a+c-1}{2}} \sqrt{e_2 - e_3}$	$(-1)^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{e_1 - e_3}$	$(-1)^{\frac{a+b-1}{2}} \sqrt{e_1 - e_2}$
2°	$i(-1)^{\frac{c-1}{2}} \sqrt{e_2 - e_3}$	$(-1)^{\frac{d-1}{2}} \sqrt{e_1 - e_2}$	$(-1)^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{e_1 - e_3}$
3°	$(-1)^{\frac{d+1}{2}} \sqrt{e_1 - e_3}$	$(-1)^{\frac{a+1}{2}} \sqrt{e_2 - e_3}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}} \sqrt{e_1 - e_2}$
4°	$i(-1)^{\frac{c+1}{2}} \sqrt{e_1 - e_3}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}} \sqrt{e_1 - e_2}$	$(-1)^{\frac{a+1}{2}} \sqrt{e_2 - e_3}$
5°	$i(-1)^{\frac{b+d-1}{2}} \sqrt{e_1 - e_2}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}} \sqrt{e_1 - e_3}$	$i(-1)^{\frac{a+b-1}{2}} \sqrt{e_2 - e_3}$
6°	$(-1)^{\frac{d+1}{2}} \sqrt{e_1 - e_2}$	$i(-1)^{\frac{c+1}{2}} \sqrt{e_2 - e_3}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}} \sqrt{e_1 - e_3}$

XXI.

$$(1)\qquad P_1 = \sum_{(r)} p\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right),$$

$$(2)\qquad \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r\eta_1}{n} + u^2 P_1}\, \sigma u \prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u + \frac{2r\omega_1}{n}\right)}{\sigma\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right)},$$

$$(3)\qquad \zeta\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = \zeta u + \sum_{(r)} \zeta\left(u + \frac{2r\omega_1}{n}\right) - \sum_{(r)} \frac{2r\eta_1}{n} + 2uP_1,$$

$$(4)\qquad p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = pu + \sum_{(r)} p\left(u + \frac{2r\omega_1}{n}\right) - 2P_1,$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

$\left(\textit{en particulier}\quad r = 1, 2, \ldots, n-1 \ \textit{ou}\ r = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}\right).$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} H_1 &= \zeta\left(\frac{\omega_1}{n} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = \eta_1 + \frac{2\omega_1}{n} P_1,\\ H_3 &= \zeta\left(\omega_3 \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = n\eta_3 + 2\omega_3 P_1, \end{aligned}\right\} \quad H_1 + H_2 + H_3 = 0,$$

$$(6)\qquad E_1 = p\left(\frac{\omega_1}{n} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right), \qquad E_3 = p\left(\omega_3 \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right), \qquad E_1 + E_2 + E_3 = 0,$$

$$(7)\qquad \sigma_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r+1-n}{n}\eta_1 + u^2 P_1} \prod_{(r)} \frac{\sigma_1\left(u + \frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}{\sigma_1\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)},$$

$$(8)\qquad \sigma_2\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r+1-n}{n}\eta_1 + u^2 P_1} \prod_{(r)} \frac{\sigma_2\left(u + \frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)}{\sigma_2\left(\frac{2r+1-n}{n}\omega_1\right)},$$

$$(9)\qquad \sigma_3\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_1 + u^2 P_1} \prod_{(r)} \frac{\sigma_3\left(u + \frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)},$$

$$(r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$$

$\left(\textit{en particulier}\quad r = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \ \textit{ou}\ r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}\right).$

XXII.

(1) $$\sigma\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma u\, \sigma_1 u = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{\wp u - e_1},$$

(2) $$\zeta\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e_1 u + \zeta u + \zeta_1 u,$$

(3) $$\wp\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = \wp u + \wp(u+\omega_1) - e_1 = \wp u + \frac{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}{\wp u - e_1},$$

(4) $$\begin{cases} \text{H}_1 = \zeta\left(\dfrac{\omega_1}{2} \,\Big|\, \dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = \eta_1 + \dfrac{e_1\omega_1}{2}, \\ \text{H}_3 = \zeta\left(\omega_3 \,\Big|\, \dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = 2\eta_3 + e_1\omega_3, \qquad \text{H}_1 + \text{H}_2 + \text{H}_3 = 0, \end{cases}$$

(5) $$\begin{cases} \text{E}_1 = \wp\left(\dfrac{\omega_1}{2} \,\Big|\, \dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e_1 + 2\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}, \\ \text{E}_2 = \wp\left(\dfrac{\omega_1}{2} + \omega_3 \,\Big|\, \dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e_1 - 2\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}, \\ \text{E}_3 = \wp\left(\omega_3 \,\Big|\, \dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = -2e_1, \\ \wp\dfrac{\omega_1}{2} + \wp\dfrac{3\omega_1}{2} = \text{E}_1 + e_1 \end{cases}$$

XXIII.

(1) $$\begin{cases} \sigma_1\left(u \,\Big|\, \dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \left(\sigma_1^2 u - \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,\sigma^2 u\right) \\ \qquad = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \dfrac{\sqrt{e_1-e_2}\,\sigma_3^2 u - \sqrt{e_1-e_3}\,\sigma_2^2 u}{\sqrt{e_1-e_2} - \sqrt{e_1-e_3}} \\ \qquad = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \left(\wp u - e_1 - \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\right), \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \sigma_2\left(u \,\Big|\, \dfrac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \left(\sigma_1^2 u + \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,\sigma^2 u\right) \\ \qquad = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \dfrac{\sqrt{e_1-e_3}\,\sigma_2^2 u + \sqrt{e_1-e_2}\,\sigma_3^2 u}{\sqrt{e_1-e_3} + \sqrt{e_1-e_2}} \\ \qquad = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \left(\wp u - e_1 + \sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\right), \end{cases}$$

(3) $$\sigma_3\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma_2 u\, \sigma_3 u = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{\wp u - e_2}\sqrt{\wp u - e_3}.$$

XXIV.

$$(1)\qquad \sigma\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma u \; \sigma_3 u = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{\wp u - e_3},$$

$$(2)\qquad \zeta\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = e_3 u + \zeta u + \zeta_3 u,$$

$$(3)\qquad \wp\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = \wp u + \wp(u+\omega_3) - e_3 = \wp u + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\wp u - e_3},$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} H_1' &= \zeta\left(\omega_1 \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) &&= 2\eta_1 + e_3 \omega_1, \\ H_3' &= \zeta\left(\frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) &&= \eta_3 + \frac{e_3 \omega_3}{2}, \end{aligned}\right\} \; H_1' + H_2' + H_3' = 0,$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} E_1' &= \wp\left(\omega_1 \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) &&= -2e_3, \\ E_2' &= \wp\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) &&= e_3 - 2\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}, \\ E_3' &= \wp\left(\frac{\omega_3}{2} \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) &&= e_3 + 2\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}, \\ &\wp\frac{\omega_3}{2} + \wp\frac{3\omega_3}{2} &&= E_3' + e_3 \end{aligned}\right.$$

XXV.

$$(1)\qquad \sigma_1\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma_1 u\, \sigma_2 u = e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{\wp u - e_1}\sqrt{\wp u - e_2},$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma_2\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) &= e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \left(\sigma_3^2 u + \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\,\sigma^2 u\right) \\ &= e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \frac{\sqrt{e_1 - e_3}\,\sigma_2^2 u - \sqrt{e_2 - e_3}\,\sigma_1^2 u}{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}} \\ &= e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma^2 u \left(\wp u - e_3 + \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma_3\left(u \mid \omega_1, \frac{\omega_3}{2}\right) &= e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \left(\sigma_3^2 u - \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\,\sigma^2 u\right) \\ &= e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \frac{\sqrt{e_1 - e_3}\,\sigma_2^2 u + \sqrt{e_2 - e_3}\,\sigma_1^2 u}{\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_2 - e_3}} \\ &= e^{\frac{e_3 u^2}{2}} \sigma^2 u \left(\wp u - e_3 - \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\right). \end{aligned}\right.$$

XXVI.

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_1 + u^2 P_1}\, \sigma u \prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u + \frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)},\\
\sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_1 + u^2 P_1}\, \sigma_\alpha u \prod_{(r)} \frac{\sigma_\alpha\left(u + \frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma_\alpha\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r-1}{n}\eta_1 + u^2 P_1}\, \sigma u \prod_{(r)} \frac{\sigma_1\left(u + \frac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\sigma_1\left(\frac{2r-1}{n}\omega_1\right)},\\
\sigma_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r-1}{n}\eta_1 + u^2 P_1}\, \sigma_1 u \prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u + \frac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{2r-1}{n}\omega_1\right)},\\
\sigma_2\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r-1}{n}\eta_1 + u^2 P_1}\, \sigma_2 u \prod_{(r)} \frac{\sigma_3\left(u + \frac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{2r-1}{n}\omega_1\right)},\\
\sigma_3\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) &= e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r-1}{n}\eta_1 + u^2 P_1}\, \sigma_3 u \prod_{(r)} \frac{\sigma_2\left(u + \frac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\sigma_2\left(\frac{2r-1}{n}\omega_1\right)},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

$\left(\textit{en particulier}\quad r = 1, 2, \ldots, n-1 \quad \textit{ou} \quad r = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}\right).$

XXVI (FIN).

$$(3)\quad \begin{cases} \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{u^2 P_1} \sigma u \prod\limits_{(r)} \dfrac{\sigma\left(u + \frac{2r}{n}\omega_1\right) \sigma\left(u - \frac{2r}{n}\omega_1\right)}{-\sigma^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}, \\[2ex] \sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{u^2 P_1} \sigma_\alpha u \prod\limits_{(r)} \dfrac{\sigma_\alpha\left(u + \frac{2r}{n}\omega_1\right) \sigma_\alpha\left(u - \frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{u^2 P_1} \sigma^n u \prod\limits_{(r)} \left[\wp u - \wp\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)\right] \\[2ex] \qquad = e^{u^2 P_1} \sigma u \prod\limits_{(r)} \left[\sigma_\alpha^2 u - \dfrac{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)} \sigma^2 u\right], \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \sigma_\alpha\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right) = e^{u^2 P_1} \sigma_\alpha u \, \sigma^{n-1} u \prod\limits_{(r)} \left[\wp u - e_\alpha - \dfrac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right) - e_\alpha}\right] \\[2ex] \qquad = e^{u^2 P_1} \sigma_\alpha u \prod\limits_{(r)} \left[\sigma_\alpha^2 u - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) \dfrac{\sigma^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)}{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)} \sigma u^2\right], \end{cases}$$

$$\left(r = r_1, \; r_2, \; \ldots, \; r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

$\left(\textit{en particulier} \quad r = 1, \; 2, \; \ldots, \; \frac{n-1}{2}\right).$

XXVII.

$$(1)\qquad 2P_3 = \sum_{(r)} p\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right),$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{n}\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_3 + u^2P_3}\, \sigma u \displaystyle\prod_{(r)} \frac{\sigma\left(u + \frac{2r}{n}\omega_3\right)}{\sigma\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right)}, \\ \sigma_\alpha\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{n}\right) = e^{-u\sum\limits_{(r)}\frac{2r}{n}\eta_3 + u^2P_3}\, \sigma_\alpha u \displaystyle\prod_{(r)} \frac{\sigma_\alpha\left(u + \frac{2r}{n}\omega_3\right)}{\sigma_\alpha\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right)}, \end{cases}$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

$$\left(\textit{en particulier}\quad r = 1, 2, \ldots, n-1 \quad \textit{ou}\quad r = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}\right)$$

$$(3)\qquad \begin{cases} H'_1 = n\eta_1 + 2\omega_1 P_3, \\ H'_3 = \eta_3 + \dfrac{2\omega_3}{n} P_3, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \sigma\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{n}\right) = e^{u^2P_3}\sigma u \displaystyle\prod_{(r)} \left[\sigma_\alpha^2 u - \frac{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right)}{\sigma^2\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right)}\sigma^2 u\right], \\ \sigma_\alpha\left(u \mid \omega_1, \dfrac{\omega_3}{n}\right) = e^{u^2P_3}\sigma_\alpha u \displaystyle\prod_{(r)} \left[\sigma_\alpha^2 u - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\frac{\sigma^2\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right)}{\sigma_\alpha^2\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right)}\sigma^2 u\right], \\ \qquad\qquad \left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right) \\ \qquad\qquad \left(\textit{en particulier}\quad r = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}\right). \end{cases}$$

Dans les formules XXVIII *et suivantes la partie réelle de* $\frac{\omega_3}{\omega_1 i}$ *est supposée positive*

XXVIII.

(1) $$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = + \frac{\pi i}{2},$$

(2) $$\left\{ \begin{array}{ll} v = \dfrac{u}{2\omega_1}, & \tau = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}, \\ z = e^{v\pi i}, & q = e^{\tau\pi i}, \end{array} \right.$$

(3) $$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{i^m} = i^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m\pi i}{2n}}, \\ \sqrt[n]{q^m} = q^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m\tau\pi i}{n}}, \end{array} \right.$$

(4) $$\left\{ \begin{array}{ll} q_0 = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n}), & q_1 = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n}), \\ q_2 = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n-1}), & q_3 = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n-1}), \end{array} \right.$$

(5) $$q_1 q_2 q_3 = 1,$$

(6) $$16 q q_1^8 = q_2^8 - q_3^8$$

XXIX.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma u &= \frac{2\omega_1}{\pi}\,\frac{z-z^{-1}}{2i}\,e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-q^{2n}z^{-2}}{1-q^{2n}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-q^{2n}z^2}{1-q^{2n}}\\ &= \frac{2\omega_1}{\pi}\sin v\pi\, e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos 2v\pi+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2},\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma_1 u &= \frac{z+z^{-1}}{2}\,e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+q^{2n}z^{-2}}{1+q^{2n}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+q^{2n}z^2}{1+q^{2n}}\\ &= \cos v\pi\, e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+2q^{2n}\cos 2v\pi+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2},\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma_2 u &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+q^{2n-1}z^{-2}}{1+q^{2n-1}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+q^{2n-1}z^2}{1+q^{2n-1}}\\ &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2v\pi+q^{4n-2}}{(1+q^{2n-1})^2},\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma_3 u &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-q^{2n-1}z^{-2}}{1-q^{2n-1}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-q^{2n-1}z^2}{1-q^{2n-1}}\\ &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-2q^{2n-1}\cos 2v\pi+q^{4n-2}}{(1-q^{2n-1})^2}.\end{aligned}\right.$$

XXX.

$$(1)\quad 2\eta_1\omega_1 = -2e_1\omega_1^2+\pi^2\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right],$$

$$(2)\quad 2\eta_1\omega_1 = -2e_2\omega_1^2+\pi^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2},$$

$$(3)\quad 2\eta_1\omega_1 = -2e_3\omega_1^2-\pi^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2},$$

$$(4)\quad 2\eta_1\omega_1 = \pi^2\left[\frac{1}{6}-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{4q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right],$$

$$(5)\quad 3\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}.$$

XXXI.

(1)

	ω_1	ω_2	ω_3
σ	$\frac{2\omega_1}{\pi}\frac{q_1^2}{q_0^2}e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}$	$-\sqrt{i}\,\frac{2\omega_1}{\pi}\,\frac{q_2^2}{2q_0^2q^{\frac{1}{4}}}\,e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}}$	$i\,\frac{2\omega_1}{\pi}\,\frac{q_3^2}{2q_0^2q^{\frac{1}{4}}}\,e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}}$
σ_1	o	$-i\sqrt{i}\,\frac{q_3^2}{2q_1^2q^{\frac{1}{4}}}\,e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}}$	$\frac{q_2^2}{2q_1^2q^{\frac{1}{4}}}\,e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}}$
σ_2	$\frac{q_3^2}{q_2^2}\,e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}$	o	$2\,\frac{q_1^2q^{\frac{1}{4}}}{q_2^2}\,e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}}$
σ_3	$\frac{q_2^2}{q_3^2}\,e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}}$	$2\sqrt{i}\,\frac{q_1^2q^{\frac{1}{4}}}{q_3^2}\,e^{\frac{\eta_2\omega_2}{2}}$	o

$$e_1 = \frac{\pi^2}{12\,\omega_1^2}\,q_0^4(q_2^8+q_3^8), \quad e_2 = \frac{\pi^2}{12\,\omega_1^2}\,q_0^4(q_2^8-2q_3^8), \quad e_3 = -\frac{\pi^2}{12\,\omega_1^2}\,q_0^4(2q_2^8-q_3^8),$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sqrt{e_2-e_3} = -\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\,4q_0^2q_1^4q^{\frac{1}{2}}, \\ \sqrt{e_1-e_3} = \quad \dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\,q_0^2q_2^4, \\ \sqrt{e_1-e_2} = \quad \dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\,q_0^2q_3^4, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \sqrt[4]{e_2-e_3} = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}}\,2q_0q_1^2q^{\frac{1}{4}}, \\ \sqrt[4]{e_1-e_3} = \quad \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}}\,q_0q_2^2, \\ \sqrt[4]{e_1-e_2} = \quad \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}}\,q_0q_3^2, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{G} = (e_2-e_3)^2(e_1-e_3)^2(e_1-e_2)^2 = \dfrac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2) = \dfrac{1}{16}\,\dfrac{\pi^{12}}{\omega_1^{12}}\,q_0^{24}q^2, \\ \sqrt[8]{\mathcal{G}} = \sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2} = i\,\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}\sqrt{\dfrac{\pi}{2\,\omega_1}}\,2q_0^3q^{\frac{1}{4}}, \\ \mathcal{G}(\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \dfrac{1}{\lambda^{12}}\,\mathcal{G}(\omega_1, \omega_3). \end{cases}$$

XXXII.

$$(1)\quad \vartheta_1(v)=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n 2q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)\pi v = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + \ldots,$$

$$(2)\quad \vartheta_2(v)=\sum_{n=0}^{n=\infty}2q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\pi v = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + \ldots,$$

$$(3)\quad \vartheta_3(v)=1+\sum_{n=1}^{n=\infty}2q^{n^2}\cos 2n\pi v = 1+2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + \ldots,$$

$$(4)\quad \vartheta_4(v)=1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n 2q^{n^2}\cos 2n\pi v = 1-2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - \ldots,$$

$$(5)\quad \vartheta_1(v)=2q_0 q^{\frac{1}{4}}\sin v\pi\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-2q^{2n}\cos 2v\pi+q^{4n}),$$

$$(6)\quad \vartheta_2(v)=2q_0 q^{\frac{1}{4}}\cos v\pi\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+2q^{2n}\cos 2v\pi+q^{4n}),$$

$$(7)\quad \vartheta_3(v)=q_0\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2v\pi+q^{4n-2}),$$

$$(8)\quad \vartheta_4(v)=q_0\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2v\pi+q^{4n-2}),$$

$$(9)\quad e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\vartheta_1(v)=\frac{1}{i}\sum_n(-1)^n e^{\tau\pi i\left(n+\frac{1}{2}+\frac{v}{\tau}\right)^2},$$

$$(10)\quad e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\vartheta_2(v)=\sum_n e^{\tau\pi i\left(n+\frac{1}{2}+\frac{v}{\tau}\right)^2},$$

$$(11)\quad e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\vartheta_3(v)=\sum_n e^{\tau\pi i\left(n+\frac{v}{\tau}\right)^2},$$

$$(12)\quad e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\vartheta_4(v)=\sum_n(-1)^n e^{\tau\pi i\left(n+\frac{v}{\tau}\right)^2};$$

XXXII (FIN).

(1 *bis*) $$\rho_1(z) = \frac{1}{i}\sum_n (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n+1},$$

(2 *bis*) $$\rho_2(z) = \sum_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n+1},$$

(3 *bis*) $$\rho_3(z) = \sum_n q^{n^2} z^{2n},$$

(4 *bis*) $$\rho_4(z) = \sum_n (-1)^n q^{n^2} z^{2n},$$

(5 *bis*) $$\rho_1(z) = 2 q_0 q^{\frac{1}{4}} \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n} z^{-2}) \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n} z^2),$$

(6 *bis*) $$\rho_2(z) = 2 q_0 q^{\frac{1}{4}} \frac{z + z^{-1}}{2} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n} z^{-2}) \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n} z^2),$$

(7 *bis*) $$\rho_3(z) = q_0 \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n-1} z^{-2}) \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n-1} z^2),$$

(8 *bis*) $$\rho_4(z) = q_0 \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n-1} z^{-2}) \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n-1} z^2),$$

$$\rho_1(z) = \rho_1(e^{v\pi i}) = \vartheta_1(v),$$

$$\rho_{\alpha+1}(z) = \rho_{\alpha+1}(e^{v\pi i}) = \vartheta_{\alpha+1}(v)$$

XXXIII.

$$\frac{\pi}{\omega_1} q_0^3 q^{\frac{1}{4}} \sigma u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \vartheta_1(\nu), \tag{1}$$

$$2 q_0 q_1^2 q^{\frac{1}{4}} \sigma_1 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \vartheta_2(\nu), \tag{2}$$

$$q_0 q_2^2 \sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \vartheta_3(\nu), \tag{3}$$

$$q_0 q_3^2 \sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \vartheta_4(\nu), \tag{4}$$

$$\sigma u = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(\nu)}{\vartheta_1'(0)} e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}, \tag{5}$$

$$\sigma_\alpha u = \frac{\vartheta_{\alpha+1}(\nu)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} e^{2\eta_1\omega_1\nu^2}, \tag{6}$$

$$\zeta u - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1'(\nu)}{\vartheta_1(\nu)}, \tag{7}$$

$$\zeta_\alpha u - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_{\alpha+1}'(\nu)}{\vartheta_{\alpha+1}(\nu)}, \tag{8}$$

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[8]{G}\, \sigma u = i e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \vartheta_1(\nu), \tag{9}$$

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3}\, \sigma_1 u = i e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \vartheta_2(\nu), \tag{10}$$

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3}\, \sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \vartheta_3(\nu), \tag{11}$$

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_2}\, \sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1\nu^2} \vartheta_4(\nu) \tag{12}$$

XXXIV.

Zéros (modulis 1, τ).

(1)

$\mathfrak{I}_1$	$\mathfrak{I}_2$	$\mathfrak{I}_3$	$\mathfrak{I}_4$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\tau}{2}$	$\frac{\tau}{2}$

$$(2)\qquad \mathfrak{I}_1(-v) = -\mathfrak{I}_1(v), \qquad \mathfrak{I}_{\alpha+1}(-v) = \mathfrak{I}_{\alpha+1}(v),$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}_1(v+1) = -\mathfrak{I}_1(v), & \mathfrak{I}_2(v+1) = -\mathfrak{I}_2(v), \\ \mathfrak{I}_3(v+1) = \quad \mathfrak{I}_3(v), & \mathfrak{I}_4(v+1) = \quad \mathfrak{I}_4(v), \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}_1\left(v+\frac{1}{2}\right) = \mathfrak{I}_2(v), & \mathfrak{I}_2\left(v+\frac{1}{2}\right) = -\mathfrak{I}_1(v), \\ \mathfrak{I}_3\left(v+\frac{1}{2}\right) = \mathfrak{I}_4(v), & \mathfrak{I}_4\left(v+\frac{1}{2}\right) = \quad \mathfrak{I}_3(v), \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}_1(v+\tau) = -\mathrm{A}\,\mathfrak{I}_1(v), & \mathfrak{I}_2(v+\tau) = \quad \mathrm{A}\,\mathfrak{I}_2(v), \\ \mathfrak{I}_3(v+\tau) = \quad \mathrm{A}\,\mathfrak{I}_3(v), & \mathfrak{I}_4(v+\tau) = -\mathrm{A}\,\mathfrak{I}_4(v), \\ \qquad \mathrm{A} = q^{-1}e^{-2i\pi v}, & \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = i\mathrm{B}\,\mathfrak{I}_4(v), & \mathfrak{I}_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \quad \mathrm{B}\,\mathfrak{I}_3(v), \\ \mathfrak{I}_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \quad \mathrm{B}\,\mathfrak{I}_2(v), & \mathfrak{I}_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = i\mathrm{B}\,\mathfrak{I}_1(v), \\ \qquad \mathrm{B} = q^{-\frac{1}{4}}e^{-i\pi v}, & \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}_1(v+m+n\tau) = (-1)^{m+n}\, q^{-n^2}e^{-2nv\pi i}\,\mathfrak{I}_1 v, \\ \mathfrak{I}_2(v+m+n\tau) = \quad (-1)^{m}\, q^{-n^2}e^{-2nv\pi i}\,\mathfrak{I}_2 v, \\ \mathfrak{I}_3(v+m+n\tau) = \qquad\qquad q^{-n^2}e^{-2nv\pi i}\,\mathfrak{I}_3 v, \\ \mathfrak{I}_4(v+m+n\tau) = \quad (-1)^{n}\, q^{-n^2}e^{-2nv\pi i}\,\mathfrak{I}_4 v, \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}_1\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right) = \quad \mathrm{B}\,\mathfrak{I}_3(v), & \mathfrak{I}_2\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right) = -i\mathrm{B}\,\mathfrak{I}_4(v), \\ \mathfrak{I}_3\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right) = i\mathrm{B}\,\mathfrak{I}_1(v), & \mathfrak{I}_4\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right) = \quad \mathrm{B}\,\mathfrak{I}_2(v) \end{cases}$$

XXXV.

$$(1)\quad \begin{cases} \vartheta_1'(1) = -\vartheta_1'(0), \\ \vartheta_2'(1) = 0, \quad \vartheta_3'(1) = 0, \quad \vartheta_4'(1) = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \vartheta_1'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \\ \vartheta_2'\left(\frac{1}{2}\right) = -\vartheta_1'(0), \\ \vartheta_3'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \\ \vartheta_4'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta_1'(\tau) = -q^{-1}\vartheta_1'(0), \\ \vartheta_2'(\tau) = -2i\pi q^{-1}\vartheta_2(0), \\ \vartheta_3'(\tau) = -2i\pi q^{-1}\vartheta_3(0), \\ \vartheta_4'(\tau) = 2i\pi q^{-1}\vartheta_4(0), \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta_1'\left(\frac{\tau}{2}\right) = \pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4(0), \\ \vartheta_2'\left(\frac{\tau}{2}\right) = -i\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3(0), \\ \vartheta_3'\left(\frac{\tau}{2}\right) = -i\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(0), \\ \vartheta_4'\left(\frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1'(0), \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \vartheta_1'(m+n\tau) = (-1)^{m+n}q^{-n^2}\vartheta_1'(0), \\ \vartheta_2'(m+n\tau) = (-1)^{m+1}2n\pi i q^{-n^2}\vartheta_2(0), \\ \vartheta_3'(m+n\tau) = -2n\pi i q^{-n^2}\vartheta_3(0), \\ \vartheta_4'(m+n\tau) = (-1)^{n+1}2n\pi i q^{-n^2}\vartheta_4(0), \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \vartheta_1'\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -i\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3(0), \\ \vartheta_2'\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4(0), \\ \vartheta_3'\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1'(0), \\ \vartheta_4'\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -i\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(0) \end{cases}$$

XXXVI.

$$(1)\quad\begin{cases} \vartheta_1'(0) = \pi\sum\limits_n(-1)^n(2n+1)\,q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\pi\left(q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \ldots\right), \\ \vartheta_2(0) = \sum\limits_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots, \\ \vartheta_3(0) = \sum\limits_n q^{n^2} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots, \\ \vartheta_4(0) = \sum\limits_n (-1)^n q^{n^2} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots, \end{cases}$$

$$(2)\quad\begin{cases} \vartheta_1'(0) = 2\pi q_0^3\, q^{\frac{1}{4}}, & \vartheta_2(0) = 2q_0 q_1^2\, q^{\frac{1}{4}}, \\ \vartheta_3(0) = q_0 q_2^2, & \vartheta_4(0) = q_0 q_3^2, \end{cases}$$

$$(3)\quad\begin{cases} 2\omega_1\sqrt[8]{G} = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\,\vartheta_1'(0), & \sqrt[4]{e_2 - e_3} = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\,\vartheta_2(0), \\ \sqrt[4]{e_1 - e_3} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\,\vartheta_3(0), & \sqrt[4]{e_1 - e_2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\omega_1}}\,\vartheta_4(0), \end{cases}$$

$$(4)\quad\begin{cases} \sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{e_1 - e_3}\,\sqrt{e_1 - e_2} = -\dfrac{\pi}{8\omega_1^3}\,\vartheta_1'^2(0), \\ \sqrt{e_2 - e_3} = -\dfrac{\pi}{2\omega_1}\,\vartheta_2^2(0), \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\,\vartheta_3^2(0), \quad \sqrt{e_1 - e_2} = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\,\vartheta_4^2(0), \end{cases}$$

$$(5)\qquad \vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0),$$

$$(6)\qquad \vartheta_3^4(0) = \vartheta_2^4(0) + \vartheta_4^4(0),$$

$$(7)\quad\begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2[+\vartheta_3^4(0) + \vartheta_4^4(0)], & e_2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2[+\vartheta_2^4(0) - \vartheta_4^4(0)], \\ e_3 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2[-\vartheta_2^4(0) - \vartheta_3^4(0)], & e_\beta - e_\gamma = \dfrac{\pi^2}{4\omega_1^2}\,\vartheta_{\alpha+1}^4(0), \text{ pour } \beta > \gamma \end{cases}$$

$$(8)\quad\begin{cases} g_2 = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{\pi}{\omega_1}\right)^4[\vartheta_2^8(0) + \vartheta_3^8(0) - \vartheta_2^4(0)\vartheta_3^4(0)] \\ \quad = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^4[\vartheta_2^8(0) + \vartheta_3^8(0) + \vartheta_4^8(0)], \\ g_3 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^6\left\{\dfrac{2^3}{3^3}[\vartheta_2^{12}(0) + \vartheta_3^{12}(0)] - \dfrac{2^2}{3^2}[\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)]\vartheta_2^4(0)\vartheta_3^4(0)\right\} \\ \quad = \dfrac{4}{3^3}\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^6[\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)][\vartheta_3^4(0) + \vartheta_4^4(0)][\vartheta_4^4(0) - \vartheta_2^4(0)] \end{cases}$$

XXXVII.

(1) $$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

(2) $$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

(3) $$k^2 + k'^2 = 1,$$

(4) $$i\sqrt{k} = \frac{\sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}},$$

(5) $$\sqrt{k'} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}},$$

(6) $$\sqrt{k} = 2q^{\frac{1}{4}} \frac{q_1^2}{q_2^2} = 2q^{\frac{1}{4}} \left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} \right]^2,$$

(7) $$\sqrt{k'} = \frac{q_3^2}{q_2^2} = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} \right]^2,$$

(8) $$\begin{cases} J(\tau) = \dfrac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2} = \dfrac{(1-k^2k'^2)^3}{k^4k'^4} \\[2ex] \qquad = \dfrac{27g_2^3}{4(g_2^3 - 27g_3^2)} = \dfrac{1}{8} \dfrac{[\vartheta_2^8(0) + \vartheta_3^8(0) + \vartheta_4^8(0)]^3}{\vartheta_2^8(0)\,\vartheta_3^8(0)\,\vartheta_4^8(0)}. \end{cases}$$

XXXVIII.

(1) $$\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\frac{q_1}{q_2} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\frac{\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n})}{\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n-1})} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\frac{\sum_\nu (-1)^\nu q^{\nu(2\nu+1)}}{\sum_\nu (-1)^\nu q^{2\nu^2}},$$

(2) $$\psi(\tau) = \sqrt[4]{k'} = \frac{q_3}{q_2} = \frac{\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n-1})}{\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n-1})} = \frac{\sum_\nu (-1)^\nu q^{\nu(2\nu+1)}}{\sum_\nu q^{\nu(2\nu+1)}},$$

(3) $$\varphi^2(\tau) = \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)},$$

(4) $$\psi^2(\tau) = \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)},$$

(5) $$\chi(\tau) = \sqrt[6]{2}\,q^{\frac{1}{24}}\frac{1}{q_2},$$

(6) $$\varphi^8(\tau) + \psi^8(\tau) = 1,$$

(7) $$\varphi(\tau)\psi(\tau) = \chi^3(\tau),$$

(8) $$\mathrm{h}(\tau) = q^{\frac{1}{12}}q_0,$$

(9) $$f(\tau) = q^{-\frac{1}{24}}q_2 = \frac{\sqrt[6]{2}}{\chi(\tau)}, \quad f_1(\tau) = q^{-\frac{1}{24}}q_3 = \frac{\sqrt[6]{2}\,\psi(\tau)}{\chi(\tau)}, \quad f_2(\tau) = \sqrt{2}\,q^{-\frac{1}{12}}q_1 = \frac{\sqrt[6]{2}\,\varphi(\tau)}{\chi(\tau)},$$

(10) $$\left\{\begin{aligned} &\vartheta_1'(0\,|\,\tau) = 2\pi\,\mathrm{h}^3(\tau),\\ &\vartheta_2(0\,|\,\tau) = \mathrm{h}(\tau)\,f_2^2(\tau) = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{h}(\tau)\,\frac{\varphi^2(\tau)}{\chi^2(\tau)},\\ &\vartheta_3(0\,|\,\tau) = \mathrm{h}(\tau)\,f^2(\tau) = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{h}(\tau)\,\frac{1}{\chi^2(\tau)},\\ &\vartheta_4(0\,|\,\tau) = \mathrm{h}(\tau)\,f_1^2(\tau) = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{h}(\tau)\,\frac{\psi^2(\tau)}{\chi^2(\tau)}, \end{aligned}\right.$$

(11) $$q_0 = q^{-\frac{1}{12}}\mathrm{h}(\tau),$$

(12) $$q_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,q^{-\frac{1}{12}}\frac{\varphi(\tau)}{\chi(\tau)},$$

(13) $$q_2 = \sqrt[6]{2}\,q^{\frac{1}{24}}\frac{1}{\chi(\tau)},$$

(14) $$q_3 = \sqrt[6]{2}\,q^{\frac{1}{24}}\frac{\psi(\tau)}{\chi(\tau)},$$

(15) $$\mathrm{J}(\tau) = \frac{[1-\chi^{24}(\tau)]^3}{\chi^{48}(\tau)}.$$

XXXIX.

$$(1)\qquad 2\eta_1\omega_1 = -\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)},$$

$$(2)\qquad 2\eta_1\omega_1 = -2e_\alpha\omega_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\vartheta_{\alpha+1}''(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)},$$

$$(3)\qquad 2\eta_1^2\omega_1^2 = \left(\frac{g_2}{3} - 2e_\alpha^2\right)\omega_1^4 - \eta_1\omega_1\frac{\vartheta_{\alpha+1}''(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} - \frac{1}{24}\frac{\vartheta_{\alpha+1}^{(\text{IV})}(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)},$$

$$(4)\qquad \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} + \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} + \frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)},$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_2^{\text{IV}}(0)}{\vartheta_2(0)} - 3\dfrac{\vartheta_2''^2(0)}{\vartheta_2^2(0)} = -2\pi^4\vartheta_3^4(0)\vartheta_4^4(0) = -32(e_1-e_2)(e_1-e_3)\omega_1^4, \\ \dfrac{\vartheta_3^{\text{IV}}(0)}{\vartheta_3(0)} - 3\dfrac{\vartheta_3''^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} = 2\pi^4\vartheta_2^4(0)\vartheta_4^4(0) = 32(e_1-e_2)(e_2-e_3)\omega_1^4, \\ \dfrac{\vartheta_4^{\text{IV}}(0)}{\vartheta_4(0)} - 3\dfrac{\vartheta_4''^2(0)}{\vartheta_4^2(0)} = -2\pi^4\vartheta_2^4(0)\vartheta_3^4(0) = -32(e_1-e_3)(e_2-e_3)\omega_1^4 \end{cases}$$

XL.

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\vartheta_3(2v\mid 4\tau) = \vartheta_3(v\mid\tau) + \vartheta_4(v\mid\tau), \\ 2\vartheta_2(2v\mid 4\tau) = \vartheta_3(v\mid\tau) - \vartheta_4(v\mid\tau), \end{cases}$$

$$(2)\ b = \sqrt{k(4\tau)} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}} = \frac{2q + 2q^9 + 2q^{25} + \ldots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots},$$

$$(3)\qquad b\,\frac{\sigma_1(2u\mid\omega_1, 4\omega_3)}{\sigma_2(2u\mid\omega_1, 4\omega_3)} = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2(u\mid\omega_1,\omega_3) - \sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3(u\mid\omega_1,\omega_3)}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2(u\mid\omega_1,\omega_3) + \sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3(u\mid\omega_1,\omega_3)}$$

XLI.

$$\mathrm{H}_1\,\Omega_3 - \mathrm{H}_3\,\Omega_1 = \frac{\pi i}{2},$$

$$\mathrm{v} = \frac{u}{2\,\Omega_1}, \qquad \mathrm{T} = \frac{c + d\tau}{a + b\tau},$$

$$\frac{\pi}{\Omega_1}\,\mathrm{Q}_0^3\,\mathrm{Q}^{\frac{1}{4}}\,\sigma u = e^{2\mathrm{H}_1\Omega_1\mathrm{V}^2}\,\vartheta_1(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}), \tag{1}$$

$$2\,\mathrm{Q}_0\,\mathrm{Q}_1^2\,\mathrm{Q}^{\frac{1}{4}}\,\sigma\lambda u = e^{2\mathrm{H}_1\Omega_1\mathrm{V}^2}\,\vartheta_2(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}), \tag{2}$$

$$\mathrm{Q}_0\,\mathrm{Q}_2^2\,\sigma\mu u = e^{2\mathrm{H}_1\Omega_1\mathrm{V}^2}\,\vartheta_3(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}), \tag{3}$$

$$\mathrm{Q}_0\,\mathrm{Q}_3^2\,\sigma\nu u = e^{2\mathrm{H}_1\Omega_1\mathrm{V}^2}\,\vartheta_4(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}), \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt[4]{\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_3} &= i\sqrt{\frac{\pi}{2\,\Omega_1}}\;2\,\mathrm{Q}_0\,\mathrm{Q}_1^2\,\mathrm{Q}^{\frac{1}{4}},\\ \sqrt[4]{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3} &= \sqrt{\frac{\pi}{2\,\Omega_1}}\;\mathrm{Q}_0\,\mathrm{Q}_2^2,\\ \sqrt[4]{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2} &= \sqrt{\frac{\pi}{2\,\Omega_1}}\;\mathrm{Q}_0\,\mathrm{Q}_3^2, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\varepsilon\,\sqrt[8]{\mathrm{G}} = i\,\frac{\pi}{\Omega_1}\sqrt{\frac{\pi}{2\,\Omega_1}}\;\mathrm{Q}_0^3\,\mathrm{Q}^{\frac{1}{4}}, \tag{6}$$

$$\varepsilon\,\sqrt[8]{\mathrm{G}}\,\sqrt{\frac{2\,\Omega_1}{\pi}}\,\sigma u = i e^{2\mathrm{H}_1\Omega_1\mathrm{V}^2}\,\vartheta_1(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}), \tag{7}$$

$$\sqrt[4]{\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_3}\,\sqrt{\frac{2\,\Omega_1}{\pi}}\;\sigma\lambda u = i e^{2\mathrm{H}_1\Omega_1\mathrm{V}^2}\,\vartheta_2(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}), \tag{8}$$

$$\sqrt[4]{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3}\,\sqrt{\frac{2\,\Omega_1}{\pi}}\;\sigma\mu u = e^{2\mathrm{H}_1\Omega_1\mathrm{V}^2}\,\vartheta_3(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}), \tag{9}$$

$$\sqrt[4]{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2}\,\sqrt{\frac{2\,\Omega_1}{\pi}}\;\sigma\nu u = e^{2\mathrm{H}_1\Omega_1\mathrm{V}^2}\,\vartheta_4(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}) \tag{10}$$

XLII.

$$\varepsilon\ \sqrt{a+b\tau}\, e^{b\nu\text{v}\pi i}\, \vartheta_1(\nu\,|\,\tau) = \vartheta_1(\text{v}\,|\,\text{T}), \tag{1}$$

$$\varepsilon'\ \sqrt{a+b\tau}\, e^{b\nu\text{v}\pi i}\, \vartheta_{\lambda+1}(\nu\,|\,\tau) = \vartheta_2(\text{v}\,|\,\text{T}), \tag{2}$$

$$\varepsilon''\ \sqrt{a+b\tau}\, e^{b\nu\text{v}\pi i}\, \vartheta_{\mu+1}(\nu\,|\,\tau) = \vartheta_3(\text{v}\,|\,\text{T}), \tag{3}$$

$$\varepsilon'''\ \sqrt{a+b\tau}\, e^{b\nu\text{v}\pi i}\, \vartheta_{\nu+1}(\nu\,|\,\tau) = \vartheta_4(\text{v}\,|\,\text{T}), \tag{4}$$

$$\varepsilon = \left[\frac{a}{b}\right]^3 i^{\frac{ab+ac+bd-acb^2-3b}{2}}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \left(\dfrac{a}{b}\right) i^{\frac{b(a+d-3)}{2}} & \textit{si } b \textit{ est impair et positif}, \\ \varepsilon = \left(\dfrac{b}{a}\right) i^{\frac{a(1-b+c)-3}{2}} & \textit{si } a \textit{ est impair et positif}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} = i^{\frac{ab}{2}+a+m'}, \\ \dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon} = i^{\frac{ab+cd}{2}+bc+a+c+m''}, \\ \dfrac{\varepsilon'''}{\varepsilon} = i^{\frac{cd}{2}+c-1+m'''}, \end{cases} \tag{7}$$

(8)

	1°.	2°	3°	4°.	5°	6°
m'	-1	-1	-1	-1	b	b
m''	-1	$b+d$	-1	$b+d$	-1	-1
m'''	d	-1	d	-1	-1	-1

XLIII.

$$\vartheta_1(v \mid \tau+1) = \sqrt{i}\,\vartheta_1(v \mid \tau), \tag{1}$$

$$\vartheta_2(v \mid \tau+1) = \sqrt{i}\,\vartheta_2(v \mid \tau), \tag{2}$$

$$\vartheta_3(v \mid \tau+1) = \vartheta_4(v \mid \tau), \tag{3}$$

$$\vartheta_4(v \mid \tau+1) = \vartheta_3(v \mid \tau), \tag{4}$$

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{i\sqrt{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\,\vartheta_1(v \mid \tau), \tag{5}$$

$$\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\,\vartheta_4(v \mid \tau), \tag{6}$$

$$\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\,\vartheta_3(v \mid \tau), \tag{7}$$

$$\vartheta_4\left(\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\,\vartheta_2(v \mid \tau), \tag{8}$$

$$\vartheta_1'(0 \mid \tau+1) = \sqrt{i}\,\vartheta_1'(0 \mid \tau), \tag{9}$$

$$\vartheta_2(0 \mid \tau+1) = \sqrt{i}\,\vartheta_2(0 \mid \tau), \tag{10}$$

$$\vartheta_3(0 \mid \tau+1) = \vartheta_4(0 \mid \tau), \tag{11}$$

$$\vartheta_4(0 \mid \tau+1) = \vartheta_3(0 \mid \tau), \tag{12}$$

$$\vartheta_1'\left(0 \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = -\sqrt{i}\,\tau\sqrt{\tau}\,\vartheta_1'(0 \mid \tau), \tag{13}$$

$$\vartheta_2\left(0 \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\,\vartheta_4(0 \mid \tau), \tag{14}$$

$$\vartheta_3\left(0 \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\,\vartheta_3(0 \mid \tau), \tag{15}$$

$$\vartheta_4\left(0 \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\,\vartheta_2(0 \mid \tau) \tag{16}$$

XLIV.

$$\vartheta_1(v \mid \tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(v - \frac{1}{2} + n\right)^2},$$

$$\vartheta_2(v \mid \tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v+n)^2},$$

$$\vartheta_3(v \mid \tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \sum_n e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v+n)^2},$$

$$\vartheta_4(v \mid \tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \sum_n e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(v - \frac{1}{2} + n\right)^2}.$$

XLV.

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{h}(\tau+1) = \sqrt[6]{i}\,\mathrm{h}(\tau),$$

$$\text{(2)} \qquad \varphi(\tau+1) = \sqrt[4]{i}\,\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

$$\text{(3)} \qquad \psi(\tau+1) = \frac{1}{\psi(\tau)},$$

$$\text{(4)} \qquad \chi(\tau+1) = \sqrt[12]{i}\,\frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

XLV (FIN).

$$(5) \qquad \mathrm{h}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\,\mathrm{h}(\tau),$$

$$(6) \qquad \varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau),$$

$$(7) \qquad \psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \varphi(\tau),$$

$$(8) \qquad \chi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \chi(\tau),$$

$$(9) \qquad \begin{cases} \varphi(\tau + 2n) = i^{\frac{n}{2}}\varphi(\tau), \\ \varphi\left(\dfrac{\tau}{1 - 2n\tau}\right) = \varphi(\tau), \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \psi(\tau + 2n) = \psi(\tau), \qquad \psi(\tau + 2n + 1) = \dfrac{1}{\psi(\tau)}, \\ \psi\left(\dfrac{\tau}{1 - 2n\tau}\right) = i^{\frac{n}{2}}\psi(\tau), \end{cases}$$

$$(11) \qquad \begin{cases} \chi(\tau + 2n) = i^{\frac{n}{6}}\chi(\tau), \\ \chi\left(\dfrac{\tau}{1 - 2n\tau}\right) = i^{\frac{n}{6}}\chi(\tau). \end{cases}$$

XLVI.

(1)

	$\varphi(\mathrm{T}) =$	$\psi(\mathrm{T}) =$
1°	$\left(\frac{2}{d}\right) i^{\frac{cd}{4}} \varphi(\tau)$	$\left(\frac{2}{a}\right) i^{-\frac{ab}{4}} \psi(\tau)$
2°	$i^{\frac{cd}{4}} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}$	$\left(\frac{2}{a}\right) i^{\frac{ab}{4}} \frac{1}{\psi(\tau)}$
3°	$\left(\frac{2}{d}\right) i^{-\frac{cd}{4}} \frac{1}{\varphi(\tau)}$	$i^{-\frac{ab}{4}} \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}$
4°	$\left(\frac{2}{c}\right) i^{\frac{cd}{4}} \frac{1}{\psi(\tau)}$	$i^{\frac{ab}{4}} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}$
5°	$\left(\frac{2}{c}\right) i^{-\frac{cd}{4}} \psi(\tau)$	$\left(\frac{2}{b}\right) i^{\frac{ab}{4}} \varphi(\tau)$
6°	$i^{-\frac{cd}{4}} \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}$	$\left(\frac{2}{b}\right) i^{-\frac{ab}{4}} \frac{1}{\varphi(\tau)}$

(2)

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
1^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}} \chi(\tau) = i^{\frac{(b-c)(abc-d)}{12}} \chi(\tau), \\
2^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c)(bcd-a)}{12}} \dfrac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)}, \\
3^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(b-c)(abc-d)}{12}} \dfrac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)}, \\
4^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(a+d)(abd-c)}{12}} \dfrac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)}, \\
5^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{\frac{(a+d)(abd-c)}{12}} \chi(\tau) = i^{-\frac{(a+d)(acd-b)}{12}} \chi(\tau), \\
6^\circ & \chi(\mathrm{T}) = i^{-\frac{(a+d)(acd-b)}{12}} \dfrac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)},
\end{array}
\right.
$$

XLVI (FIN).

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l|l}
1^\circ & \chi(\mathrm{T}) = \left(\dfrac{2}{ad}\right)\rho\, e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab-cd)}\,\chi(\tau),\\[2ex]
2^\circ & \chi(\mathrm{T}) = -\left(\dfrac{2}{a}\right)\rho\, e^{\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)}\,\dfrac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},\\[2ex]
3^\circ & \chi(\mathrm{T}) = -\left(\dfrac{2}{d}\right)\rho\, e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)}\,\dfrac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)},\\[2ex]
4^\circ & \chi(\mathrm{T}) = -\left(\dfrac{2}{c}\right)\rho\, e^{\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)}\,\dfrac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},\\[2ex]
5^\circ & \chi(\mathrm{T}) = \left(\dfrac{2}{bc}\right)\rho\, e^{\frac{3\pi i}{8}(ab-cd)}\,\chi(\tau),\\[2ex]
6^\circ & \chi(\mathrm{T}) = -\left(\dfrac{2}{b}\right)\rho\, e^{-\frac{3\pi i}{8}(ab+cd)}\,\dfrac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)},\\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}(ab+ac+bd-ab^2c)} = e^{-\frac{2\pi i}{3}(cd+ac+bd-bc^2d)},}
\end{array}\right.$$

$$(4)\qquad \mathrm{h}(\mathrm{T}) = \left[\frac{a}{b}\right] e^{-\frac{\pi i}{12}[3(b-\operatorname{sgn} b)+ac(b^2-1)-b(a+d)]}\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}\,\mathrm{h}(\tau),$$

$$(5)\qquad \mathrm{h}(\mathrm{T}) = \left(\frac{a}{b}\right) i^{\frac{1-b}{2}} e^{-\frac{\pi i}{12}[ac(b^2-1)-b(a+d)]}\sqrt{-i(a+b\tau)}\,\mathrm{h}(\tau),$$

$$(6)\qquad \mathrm{h}(\mathrm{T}) = \left(\frac{b}{a}\right) i^{\frac{a-1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{12}[a(b-c)+bd(a^2-1)]}\sqrt{a+b\tau}\,\mathrm{h}(\tau).$$

XLVII.

$$
(1)\quad \begin{cases}
Q = q^2 = e^{2\tau\pi i}, \\
Q_0 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 - q^{4\nu}), \qquad Q_1 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 + q^{4\nu}), \\
Q_2 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 + q^{2(2\nu-1)}), \qquad Q_3 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1 - q^{2(2\nu-1)}),
\end{cases}
$$

$$
(2)\quad \begin{cases}
Q_0 = q_0 q_1, \qquad Q_3 = q_2 q_3 = \dfrac{1}{q_1}, \\
2 Q_0^2 Q_2^4 = q_0^2 (q_2^4 + q_3^4), \\
8 Q^{\frac{1}{2}} Q_0^2 Q_1^4 = q_0^2 (q_2^4 - q_3^4),
\end{cases}
$$

$$
(3)\quad \begin{cases}
\vartheta_1(2v \mid 2\tau) = \dfrac{\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(0 \mid 2\tau)}, \\
\vartheta_2(2v \mid 2\tau) = \dfrac{\vartheta_2^2(v) - \vartheta_1^2(v)}{2\vartheta_3(0 \mid 2\tau)} = \dfrac{\vartheta_3^2(v) - \vartheta_4^2(v)}{2\vartheta_2(0 \mid 2\tau)}, \\
\vartheta_3(2v \mid 2\tau) = \dfrac{\vartheta_2^2(v) + \vartheta_1^2(v)}{2\vartheta_2(0 \mid 2\tau)} = \dfrac{\vartheta_3^2(v) + \vartheta_4^2(v)}{2\vartheta_3(0 \mid 2\tau)}, \\
\vartheta_4(2v \mid 2\tau) = \dfrac{\vartheta_3(v)\,\vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0 \mid 2\tau)},
\end{cases}
$$

$$
(4)\quad \begin{cases}
2\vartheta_1'(0 \mid 2\tau)\,\vartheta_4(0 \mid 2\tau) = \vartheta_1'(0)\,\vartheta_2 \\
2\vartheta_2(0 \mid 2\tau)\,\vartheta_3(0 \mid 2\tau) = \vartheta_2^2(0), \\
2\vartheta_2^2(0 \mid 2\tau) = \vartheta_3^2(0) - \vartheta_4^2(0), \\
2\vartheta_3^2(0 \mid 2\tau) = \vartheta_3^2(0) + \vartheta_4^2(0), \\
\qquad \vartheta_4^2(0 \mid 2\tau) = \vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0
\end{cases}
$$

XLVIII.

(1)
$$\left\{\begin{aligned} &Q' = q^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\tau\pi i}{2}},\\ &Q'_0 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1-q^\nu), \qquad Q'_1 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1+q^\nu),\\ &Q'_2 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1+q^{\nu-\frac{1}{2}}\right), \qquad Q'_3 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1-q^{\nu-\frac{1}{2}}\right),\end{aligned}\right.$$

(2)
$$\left\{\begin{aligned} &Q'_0 = q_0 q_3, \qquad Q'_1 = \frac{1}{q_3} = q_1 q_2,\\ &2 q_0^2 q_2^4 = Q_0'^2\,[Q_2'^4 + Q_3'^4],\\ &8 q^{\frac{1}{2}} q_0^2 q_1^4 = Q_0'^2\,[Q_2'^4 - Q_3'^4],\end{aligned}\right.$$

(3)
$$\left\{\begin{aligned} &\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2\vartheta_1(v)\vartheta_4(v)}{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},\\ &\vartheta_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{2\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},\\ &\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\vartheta_4^2(v)-\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_4\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{\vartheta_3^2(v)+\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},\\ &\vartheta_4\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\vartheta_4^2(v)+\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{\vartheta_3^2(v)-\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_4\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)},\end{aligned}\right.$$

(4)
$$\left\{\begin{aligned} &\vartheta'_1\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = 2\vartheta'_1(0)\,\vartheta_4(0),\\ &\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_4\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_4^2(0),\\ &\vartheta_2^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = 2\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),\\ &\vartheta_3^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_3^2(0)+\vartheta_2^2(0),\\ &\vartheta_4^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_3^2(0)-\vartheta_2^2(0)\end{aligned}\right.$$

XLIX.

$$(1)\qquad 2\,\mathrm{h}^2(2\tau) = \mathrm{h}(\tau)\,\vartheta_2(0),$$

$$(2)\qquad \mathrm{h}^2\left(\frac{\tau}{2}\right) = \mathrm{h}(\tau)\,\vartheta_4(0),$$

$$(3)\qquad \mathrm{h}^2\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = \sqrt[8]{i}\,\mathrm{h}(\tau)\,\vartheta_3(0),$$

$$(4)\qquad \psi(2\tau)\,\varphi(\tau) = \sqrt[8]{2}\,\chi(\tau)\,\chi(2\tau),$$

$$(5)\qquad \varphi^4(2\tau) = \frac{1-\psi^4(\tau)}{1+\psi^4(\tau)}, \qquad \psi^4(2\tau) = \frac{2\psi^2(\tau)}{1+\psi^4(\tau)},$$

$$(6)\qquad \varphi^2(2\tau) = \frac{\varphi^4(\tau)}{1+\psi^4(\tau)} = \frac{1-\psi^4(\tau)}{\varphi^4(\tau)},$$

$$(7)\qquad \chi\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right) = \frac{1}{\sqrt[8]{2}\,\chi(\tau)},$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \sqrt{2}\,\sqrt[12]{i}\,\frac{\mathrm{h}(2\tau)}{\mathrm{h}\left(\frac{\tau+1}{2}\right)},\\ \psi(\tau) &= \sqrt[12]{i}\,\frac{\mathrm{h}\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\mathrm{h}\left(\frac{\tau+1}{2}\right)},\\ \chi(\tau) &= \sqrt[6]{2}\,\sqrt[12]{i}\,\frac{\mathrm{h}(\tau)}{\mathrm{h}\left(\frac{\tau+1}{2}\right)}, \end{aligned}\right.$$

XLIX (fin).

$$(9)\quad \begin{cases} q_0 = e^{-\frac{\tau\pi i}{12}}\,\mathrm{h}(\tau), \qquad q_1 = e^{-\frac{\tau\pi i}{12}}\,\dfrac{\mathrm{h}(2\tau)}{\mathrm{h}(\tau)}, \\[2ex] q_2 = e^{\frac{(\tau-1)\pi i}{24}}\,\dfrac{\mathrm{h}\left(\dfrac{\tau+1}{2}\right)}{\mathrm{h}(\tau)}, \qquad q_3 = e^{\frac{\tau\pi i}{24}}\,\dfrac{\mathrm{h}\left(\dfrac{\tau}{2}\right)}{\mathrm{h}(\tau)}, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \sqrt{1+\psi^4(\tau)} = \sqrt{2}\,\dfrac{\psi(\tau)}{\psi^2(2\tau)}, \\[2ex] \sqrt{1-\psi^4(\tau)} = \sqrt{2}\,\dfrac{\psi(\tau)\,\varphi^2(2\tau)}{\psi^2(2\tau)}, \\[2ex] \sqrt{1+\varphi^4(\tau)} = \sqrt{2}\,\dfrac{\varphi(\tau)}{\varphi^2\left(\dfrac{\tau}{2}\right)}, \\[2ex] \sqrt{1-\varphi^4(\tau)} = \sqrt{2}\,\dfrac{\varphi(\tau)\,\psi^2\left(\dfrac{\tau}{2}\right)}{\varphi^2\left(\dfrac{\tau}{2}\right)}. \end{cases}$$

L.

$$\mathfrak{S}_1(2v) = \frac{2\,\mathfrak{S}_1(v)\,\mathfrak{S}_2(v)\,\mathfrak{S}_3(v)\,\mathfrak{S}_4(v)}{\mathfrak{S}_2(0)\,\mathfrak{S}_3(0)\,\mathfrak{S}_4(0)},$$

$$\mathfrak{S}_2(2v) = \frac{\mathfrak{S}_2^2(v)\,\mathfrak{S}_3^2(v) - \mathfrak{S}_1^2(v)\,\mathfrak{S}_4^2(v)}{\mathfrak{S}_2(0)\,\mathfrak{S}_3^2(0)},$$

$$\mathfrak{S}_3(2v) = \frac{\mathfrak{S}_2^2(v)\,\mathfrak{S}_3^2(v) + \mathfrak{S}_1^2(v)\,\mathfrak{S}_4^2(v)}{\mathfrak{S}_2^2(0)\,\mathfrak{S}_3(0)},$$

$$\mathfrak{S}_4(2v) = \frac{\mathfrak{S}_3^4(v) - \mathfrak{S}_2^4(v)}{\mathfrak{S}_4^3(0)} = \frac{\mathfrak{S}_4^4(v) - \mathfrak{S}_1^4(v)}{\mathfrak{S}_4^3(0)}.$$

LI.

$$\frac{1}{a_1} = \frac{\pi}{\omega_1} q_0^3 q^{\frac{1}{4}} = \frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1}, \qquad \frac{1}{A_1} = \frac{n\pi}{\omega_1} Q_0^3 Q^{\frac{1}{4}} = \frac{n\vartheta_1'(0 \mid n\tau)}{2\omega_1},$$

$$\frac{1}{a_2} = 2 q_1^2 q_0 q^{\frac{1}{4}} = \vartheta_2(0), \qquad \frac{1}{A_2} = 2 Q_1^2 Q_0 Q^{\frac{1}{4}} = \vartheta_2(0 \mid n\tau),$$

$$\frac{1}{a_3} = q_2^2 q_0 = \vartheta_3(0), \qquad \frac{1}{A_3} = Q_2^2 Q_0 = \vartheta_3(0 \mid n\tau),$$

$$\frac{1}{a_4} = q_3^2 q_0 = \vartheta_4(0), \qquad \frac{1}{A_4} = Q_3^2 Q_0 = \vartheta_4(0 \mid n\tau)$$

$$(1) \quad \begin{cases} Q = q^n = e^{n\tau\pi i}, \\ Q_0 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1 - q^{2n\nu}), \qquad Q_1 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1 + q^{2n\nu}), \\ Q_2 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1 + q^{n(2\nu-1)}), \qquad Q_3 = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1 - q^{n(2\nu-1)}), \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \prod_{(r)} \vartheta_1\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{\sum_{(r)} E\left(\frac{r}{n}\right)} q_0^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n-1}{8}} \frac{Q_0}{q_0} \sqrt{n}, \\ \prod_{(r)} \vartheta_2\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{\sum_{(r)} E\left(\frac{n+2r}{2n}\right)} q_0^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n-1}{8}} \frac{Q_1}{q_1}, \\ \prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r}{n}\right) = q_0^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q_2}{q_2}, \\ \prod_{(r)} \vartheta_4\left(\frac{r}{n}\right) = q_0^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q_3}{q_3}, \end{cases}$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right).$$

$$(3) \quad \begin{cases} \prod_{(r)} \vartheta_1\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{-\frac{n-1}{2} + \sum_{(r)} r} q_0^{n-1} q^{\frac{n-1}{4}} \frac{Q_0^2}{q_0^2} n, \\ \prod_{(r)} \vartheta_2\left(\frac{r}{n}\right) = (-1)^{\sum_{(r)} r} q_0^{n-1} q^{\frac{n-1}{4}} \frac{Q_1^2}{q_1^2}, \\ \prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r}{n}\right) = q_0^{n-1} \frac{Q_2^2}{q_2^2}, \\ \prod_{(r)} \vartheta_4\left(\frac{r}{n}\right) = q_0^{n-1} \frac{Q_3^2}{q_3^2}, \end{cases}$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta_1(nv\mid n\tau) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}-\sum_{(r)} r}\,\frac{Q_0}{q_0^n}\,\vartheta_1(v)\prod_{(r)}\vartheta_1\left(v+\frac{r}{n}\right),\\
\vartheta_2(nv\mid n\tau) &= (-1)^{\sum_{(r)} r}\,\frac{Q_0}{q_0^n}\,\vartheta_2(v)\prod_{(r)}\vartheta_2\left(v+\frac{r}{n}\right),\\
\vartheta_3(nv\mid n\tau) &= \frac{Q_0}{q_0^n}\,\vartheta_3(v)\prod_{(r)}\vartheta_3\left(v+\frac{r}{n}\right),\\
\vartheta_4(nv\mid n\tau) &= \frac{Q_0}{q_0^n}\,\vartheta_4(v)\prod_{(r)}\vartheta_4\left(v+\frac{r}{n}\right),
\end{aligned}\right.$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}).$$

$$(5)\quad \vartheta_1(nv\mid n\tau) = \frac{a_1 a_{\alpha+1}^{n-1}}{A_1}\,\vartheta_1(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_{\alpha+1}^2(v) - \frac{\vartheta_{\alpha+1}^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}\,\vartheta_1^2(v)\right],$$

$$(6)\quad \vartheta_2(nv\mid n\tau) = \frac{a_2^n}{A_2}\,\vartheta_2(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_2^2(v) - \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{r}{n}\right)}\,\vartheta_1^2(v)\right],$$

$$(7)\quad \vartheta_3(nv\mid n\tau) = \frac{a_3^n}{A_3}\,\vartheta_3(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_3^2(v) + \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{r}{n}\right)}\,\vartheta_1^2(v)\right],$$

$$(8)\quad \vartheta_4(nv\mid n\tau) = \frac{a_4^n}{A_4}\,\vartheta_4(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_4^2(v) - \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\vartheta_4^2\left(\frac{r}{n}\right)}\,\vartheta_1^2(v)\right],$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{q_0^n}{Q_0} &= \frac{A_1}{a_1}\prod_{(r)}\vartheta_1^2\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{A_{\alpha+1}}{a_{\alpha+1}}\prod_{(r)}\vartheta_{\alpha+1}^2\left(\frac{r}{n}\right)\\
&= \frac{\vartheta_1'(0)\prod_{(r)}\vartheta_1^2\left(\frac{r}{n}\right)}{n\,\vartheta_1'(0\mid n\tau)} = \frac{\vartheta_{\alpha+1}(0)\prod_{(r)}\vartheta_{\alpha+1}^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\vartheta_{\alpha+1}(0\mid n\tau)}\\
&= (-1)^{\sum_{(r)} E\left(\frac{r}{n}\right)}\,\frac{\sqrt{n}\,[\vartheta_1'(0)]^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{(r)}\vartheta_1\left(\frac{r}{n}\right)},
\end{aligned}\right.$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

LII.

$$\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1} = \frac{1}{a_1} = \frac{\pi}{\omega_1} q_0^3 q^{\frac{1}{4}}, \qquad \frac{1}{2\omega_1}\vartheta_1'\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = \frac{1}{A_1'} = \frac{\pi}{\omega_1} Q_0'^3 Q'^{\frac{1}{4}},$$

$$\vartheta_2(0) = \frac{1}{a_2} = 2q_1^2 q_0 q^{\frac{1}{4}}, \qquad \vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = \frac{1}{A_2'} = 2Q_1'^2 Q_0' Q'^{\frac{1}{4}},$$

$$\vartheta_3(0) = \frac{1}{a_3} = q_2^2 q_0, \qquad \vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = \frac{1}{A_3'} = Q_2'^2 Q_0',$$

$$\vartheta_4(0) = \frac{1}{a_4} = q_3^2 q_0, \qquad \vartheta_4\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right) = \frac{1}{A_4'} = Q_3'^2 Q_0',$$

$$(1)\quad \begin{cases} Q' = q^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\tau\pi i}{n}}, \\ Q_0' = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1 - q^{\frac{2\nu}{n}}\right), \qquad Q_1' = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1 + q^{\frac{2\nu}{n}}\right), \\ Q_2' = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1 + q^{\frac{2\nu-1}{n}}\right), \qquad Q_3' = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1 - q^{\frac{2\nu-1}{n}}\right), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(\frac{r\tau}{n}\right) = i^{\frac{n-1}{2}} q^{-\frac{n-1}{8n}} q_0^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q_0'}{q_0}, \\ \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \vartheta_2\left(\frac{r\tau}{n}\right) = q^{-\frac{n-1}{8n}} q_0^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q_1'}{q_1}, \\ \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right) = q_0^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q_2'}{q_2}, \\ \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \vartheta_4\left(\frac{r\tau}{n}\right) = q_0^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q_3'}{q_3}, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \prod_{(r)} \vartheta_1\left(\frac{r\tau}{n}\right) = (-1)^{\sum_{(r)} r} q_0^{n-1} Q_0'^2 q^{\frac{(n-1)(n-2)}{12n} - \sum_{(r)} \frac{r^2}{n^2}}, \\ \prod_{(r)} \vartheta_2\left(\frac{r\tau}{n}\right) = \frac{q_0^{n-1}}{q_1^2} Q_1'^2 q^{\frac{(n-1)(n-2)}{12n} - \sum_{(r)} \frac{r^2}{n^2}}, \\ \prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right) = \frac{q_0^{n-1}}{q_2^2} Q_2'^2 q^{\frac{n^2-1}{12n} - \sum_{(r)} \frac{r^2}{n^2}}, \\ \prod_{(r)} \vartheta_4\left(\frac{r\tau}{n}\right) = (-1)^{\sum_{(r)} r} \frac{q_0^{n-1}}{q_3^2} Q_3'^2 q^{\frac{n^2-1}{12n} - \sum_{(r)} \frac{r^2}{n^2}}, \\ (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}) \end{cases}$$

LII (FIN).

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)=b_1 e^{2v\pi i\sum_{(r)}\frac{r}{n}}\vartheta_1(v)\prod_{(r)}\vartheta_1\left(v+\frac{r\tau}{n}\right),\\&\vartheta_{\alpha+1}\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)=b_{\alpha+1} e^{2v\pi i\sum_{(r)}\frac{r}{n}}\vartheta_{\alpha+1}(v)\prod_{(r)}\vartheta_{\alpha+1}\left(v+\frac{r\tau}{n}\right),\\&\qquad(r=r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}),\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{b_1}=\frac{\Lambda_1'}{a_1}\prod_{(r)}\vartheta_1\left(\frac{r\tau}{n}\right),\qquad \frac{1}{b_{\alpha+1}}=\frac{\Lambda_{\alpha+1}'}{a_{\alpha+1}}\prod_{(r)}\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{r\tau}{n}\right),\\&(-1)^{\sum_{(r)}r}\,b_1=b_2=b_3=(-1)^{\sum_{(r)}r}\,b_4=\frac{Q_0'}{q_0^n}\,Q'^{-\frac{n^2-1}{12}-\frac{1}{n}\sum_{(r)}r^2},\\&\qquad(r=r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}),\end{aligned}\right.$$

en particulier

$$b_1=b_2=b_3=b_4=\frac{Q_0'}{q_0^n},\ \text{pour}\ r=\pm1,\pm2,\ldots,\pm\frac{n-1}{2},$$

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}&(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Lambda_1'}{a_1}\prod_{(r)}\vartheta_1^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)=\frac{\Lambda_{\alpha+1}'}{a_{\alpha+1}}\prod_{(r)}\vartheta_{\alpha+1}^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)=\frac{q_0^n}{Q_0'}\,q^{\frac{n^2-1}{12n}-2\sum_{(r)}\frac{r^2}{n^2}},\\&\qquad\left(r=r_1,r_2,\ldots,r_{\frac{n-1}{2}}\right),\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)=\frac{a_1 a_{\alpha+1}^{n-1}}{\Lambda_1'}\vartheta_1(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_{\alpha+1}^2(v)-\frac{\vartheta_{\alpha+1}^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}\vartheta_1^2(v)\right],\\&\vartheta_2\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)=\frac{a_2^n}{\Lambda_2'}\vartheta_2(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_2^2(v)-\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}\vartheta_1^2(v)\right],\\&\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)=\frac{a_3^n}{\Lambda_3'}\vartheta_3(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_3^2(v)+\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}\vartheta_1^2(v)\right],\\&\vartheta_4\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)=\frac{a_4^n}{\Lambda_4'}\vartheta_4(v)\prod_{(r)}\left[\vartheta_4^2(v)-\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\vartheta_4^2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}\vartheta_1^2(v)\right],\\&\qquad\left(r=r_1,r_2,\ldots,r_{\frac{n-1}{2}}\right)\end{aligned}\right.$$

LIII.

$$(1)\qquad [\mathrm{h}(\tau)]^{3\frac{n-1}{2}} = \prod_{(r)} \left[\vartheta_2\left(\frac{r}{n}\right)\vartheta_3\left(\frac{r}{n}\right)\vartheta_4\left(\frac{r}{n}\right)\right],$$

$$(2)\qquad \sqrt{n}\,\mathrm{h}(n\tau)\,[\mathrm{h}(\tau)]^{\frac{n-3}{2}} = \prod_{(r)} \vartheta_1\left(\frac{r}{n}\right),$$

$$(3)\qquad \frac{\varphi(n\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\prod_{(r)} \vartheta_2\left(\frac{r}{n}\right)}{\prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r}{n}\right)},$$

$$(4)\qquad \frac{\psi(n\tau)}{\psi(\tau)} = \frac{\prod_{(r)} \vartheta_4\left(\frac{r}{n}\right)}{\prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r}{n}\right)},$$

$$(5)\qquad \frac{\chi(n\tau)}{\chi(\tau)} = \frac{[\mathrm{h}(\tau)]^{\frac{n-1}{2}}}{\prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r}{n}\right)},$$

$$(6)\qquad q^{-\frac{n^2-1}{8n}}[\mathrm{h}(\tau)]^{3\frac{n-1}{2}} = \prod_{(r)} \left[\vartheta_2\left(\frac{r\tau}{n}\right)\vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)\vartheta_4\left(\frac{r\tau}{n}\right)\right],$$

$$(7)\qquad i^{\frac{n-1}{2}}\, q^{-\frac{n^2-1}{24n}}\,\mathrm{h}\left(\frac{\tau}{n}\right)[\mathrm{h}(\tau)]^{\frac{n-3}{2}} = \prod_{(r)} \vartheta_1\left(\frac{r\tau}{n}\right),$$

$$(8)\qquad \frac{\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\varphi(\tau)} = \frac{\prod_{(r)} \vartheta_2\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)},$$

$$(9)\qquad \frac{\psi\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\psi(\tau)} = \frac{\prod_{(r)} \vartheta_4\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)},$$

$$(10)\qquad \frac{\chi\left(\frac{\tau}{n}\right)}{\chi(\tau)} = q^{-\frac{n^2-1}{24n}}\,\frac{[\mathrm{h}(\tau)]^{\frac{n-1}{2}}}{\prod_{(r)} \vartheta_3\left(\frac{r\tau}{n}\right)},$$

$$\left(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right).$$

LIV.

$$\mathcal{A}\,\vartheta_1(nv) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{(\mu,\nu)} \vartheta_1\left(v + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu\tau}{n}\right),$$

$$\mathcal{A}\,\vartheta_2(nv) = (-1)^{\sum\limits_{(r)} r} \prod_{(\mu,\nu)} \vartheta_2\left(v + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu\tau}{n}\right),$$

$$\mathcal{A}\,\vartheta_3(nv) = \prod_{(\mu,\nu)} \vartheta_3\left(v + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu\tau}{n}\right),$$

$$\mathcal{A}\,\vartheta_4(nv) = (-1)^{\sum\limits_{(r)} r} \prod_{(\mu,\nu)} \vartheta_4\left(v + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu\tau}{n}\right),$$

$$\mathcal{A} = q_0^{n^2-1}\, q^{\frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{n}\sum\limits_{(r)} r^2}\, e^{-2v\pi i \sum\limits_{(r)} r},$$

$$\begin{pmatrix} r = & r_1, & r_2, & \ldots, & r_{n-1} \\ \mu = 0, & r_1, & r_2, & \ldots, & r_{n-1} \\ \nu = 0, & r_1, & r_2, & \ldots, & r_{n-1} \end{pmatrix}$$

LVII.

(1) $$\left\{\begin{aligned} T_\rho &= \vartheta_\rho(a+b)\,\vartheta_\rho(a-b)\,\vartheta_\rho(c+d)\,\vartheta_\rho(c-d),\\ T'_\rho &= \vartheta_\rho(a+c)\,\vartheta_\rho(a-c)\,\vartheta_\rho(d+b)\,\vartheta_\rho(d-b),\\ T''_\rho &= \vartheta_\rho(a+d)\,\vartheta_\rho(a-d)\,\vartheta_\rho(b+c)\,\vartheta_\rho(b-c),\end{aligned}\right.$$

(2) $$T_1 + T'_1 + T''_1 = 0,$$

(3) $$\left\{\begin{aligned} T_2 - T'_1 - T''_2 &= 0,\\ T_3 + T'_1 - T''_3 &= 0,\\ T_4 - T'_1 - T''_4 &= 0,\end{aligned}\right.$$

(4) $$\left\{\begin{aligned} T_2 + T_1 &= T'_2 + T'_3 = T''_2 + T''_3,\\ T_3 + T_4 &= T'_3 + T'_4 = T''_3 + T''_4\end{aligned}\right.$$

LVIII.

(1) $$\left\{\begin{aligned} &\vartheta_3(x\,|\,\alpha\tau)\,\vartheta_3(y\,|\,\beta\tau)\\ &\quad= \sum_{r=0}^{r=\alpha+\beta-1} q^{\beta r^2} e^{2ri\pi y}\,\vartheta_3[x+y+r\beta\tau\,|\,(\alpha+\beta)\tau]\\ &\qquad\times \vartheta_3[\alpha y - \beta x + r\alpha\beta\tau\,|\,\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau]\\ &\quad= \sum_{r=0}^{r=\alpha+\beta-1} q^{\alpha r^2} e^{2ri\pi x}\,\vartheta_3[x+y+r\alpha\tau\,|\,(\alpha+\beta)\tau]\\ &\qquad\times \vartheta_3[\beta x - \alpha y + r\alpha\beta\tau\,|\,\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau],\end{aligned}\right.$$

(2) $$\left\{\begin{aligned} \vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y) &= \vartheta_3(x+y\,|\,2\tau)\,\vartheta_3(x-y\,|\,2\tau)\\ &\quad+ \vartheta_2(x+y\,|\,2\tau)\,\vartheta_2(x-y\,|\,2\tau),\end{aligned}\right.$$

(3) $$\left\{\begin{aligned} \vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y) &= \vartheta_2(x+y\,|\,2\tau)\,\vartheta_3(x-y\,|\,2\tau)\\ &\quad+ \vartheta_3(x+y\,|\,2\tau)\,\vartheta_2(x-y\,|\,2\tau)\end{aligned}\right.$$

LIX.

(1)
$$\begin{cases} \xi_{\alpha 0} u = \dfrac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_\alpha}, \\ \xi_{0\alpha} u = \dfrac{\sigma u}{\sigma_\alpha u} = \dfrac{1}{\sqrt{pu - e_\alpha}}, \\ \xi_{\beta\gamma} u = \dfrac{\sigma_\beta u}{\sigma_\gamma u} = \dfrac{\sqrt{pu - e_\beta}}{\sqrt{pu - e_\gamma}}, \end{cases}$$

(2)
$$\xi_{\alpha 0} = \frac{1}{\xi_{0\alpha}}, \qquad \xi_{\beta\gamma} = \frac{\xi_{\beta 0}}{\xi_{\gamma 0}} = \frac{\xi_{\beta\alpha}}{\xi_{\gamma\alpha}} = \xi_{\beta 0}\xi_{0\gamma} = \xi_{\beta\alpha}\xi_{\alpha\gamma},$$

(3)
$$pu = e_\alpha + \xi_{\alpha 0}^2 = e_\beta + \xi_{\beta 0}^2 = e_\gamma + \xi_{\gamma 0}^2,$$

(4)
$$3pu = \xi_{\alpha 0}^2 + \xi_{\beta 0}^2 + \xi_{\gamma 0}^2,$$

(5)
$$pu = e_\alpha + \frac{e_\gamma - e_\alpha}{1 - \xi_{\gamma\alpha}^2} = e_\beta + \frac{e_\alpha - e_\beta}{1 - \xi_{\alpha\beta}^2} = e_\gamma + \frac{e_\beta - e_\gamma}{1 - \xi_{\beta\gamma}^2},$$

(6)
$$\xi_{0\gamma}^2 = \frac{1 - \xi_{\beta\gamma}^2}{e_\beta - e_\gamma} = \frac{1 - \xi_{\alpha\gamma}^2}{e_\alpha - e_\gamma}.$$

LX.

(1)
$$\begin{cases} \xi_{\alpha 0}\omega_\beta = \sqrt{e_\beta - e_\alpha}, \\ \xi_{\beta\gamma}\omega_\alpha = \dfrac{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} = -\dfrac{\sqrt{e_\beta - e_\alpha}}{\sqrt{e_\gamma - e_\alpha}}, \end{cases}$$

(2)
$$\lambda = \xi_{21}\omega_3, \qquad \lambda' = \xi_{23}\omega_1,$$

(3)
$$\begin{cases} \xi_{\alpha 0}(u + 2\omega_\alpha) = \xi_{\alpha 0} u, & \xi_{\beta\gamma}(u + 2\omega_\alpha) = \xi_{\beta\gamma} u, \\ \xi_{\alpha 0}(u + 2\omega_\beta) = -\xi_{\alpha 0} u, & \xi_{\beta\gamma}(u + 2\omega_\beta) = -\xi_{\beta\gamma} u, \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} \xi_{\alpha 0}(u + \omega_\alpha) = -\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}\,\xi_{0\alpha} u \\ \qquad\qquad = -\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\sqrt{e_\gamma - e_\alpha}\,\xi_{0\alpha} u, \\ \xi_{\alpha 0}(u + \omega_\beta) = \sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\xi_{\gamma\beta} u, \\ \xi_{\beta\gamma}(u + \omega_\alpha) = \dfrac{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}}\xi_{\gamma\beta} u = -\dfrac{\sqrt{e_\beta - e_\alpha}}{\sqrt{e_\gamma - e_\alpha}}\xi_{\gamma\beta} u, \\ \xi_{\beta\gamma}(u + \omega_\beta) = -\sqrt{e_\beta - e_\alpha}\,\xi_{0\alpha} u \end{cases}$$

LXI.

(1) $$\xi'_{\alpha 0}(u) = -\xi_{\beta 0}(u)\,\xi_{\gamma 0}(u),$$

(2) $$\xi'_{0\alpha}(u) = \quad \xi_{\beta\alpha}(u)\,\xi_{\gamma\alpha}(u),$$

(3) $$\xi'_{\beta\gamma}(u) = -(e_\beta - e_\gamma)\,\xi_{0\gamma}(u)\,\xi_{\alpha\gamma}(u)$$

LXII.

(1) $$\xi'^2_{\alpha 0}(u) = [e_\alpha - e_\beta + \xi^2_{\alpha 0}(u)]\,[e_\alpha - e_\gamma + \xi^2_{\alpha 0}(u)],$$

(2) $$\xi'^2_{0\alpha}(u) = [1 + (e_\alpha - e_\beta)\,\xi^2_{0\alpha}(u)]\,[1 + (e_\alpha - e_\gamma)\,\xi^2_{0\alpha}(u)],$$

(3) $$\xi'^2_{\beta\gamma}(u) = [1 - \xi^2_{\beta\gamma}(u)]\,[e_\beta - e_\alpha + (e_\alpha - e_\gamma)\,\xi^2_{\beta\gamma}(u)]$$

LXIII.

(1) $$\xi^2_{\alpha 0}(u) = \mathrm{p}\,u - e_\alpha = -\zeta' u - e_\alpha,$$

(2) $$\frac{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}{\mathrm{p}\,u - e_\alpha} = \mathrm{p}\,(u + \omega_\alpha) - e_\alpha = -\zeta'_\alpha u - e_\alpha,$$

(3) $$(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)\,\xi^2_{0\alpha}(u) = -\zeta'_\alpha u - e_\alpha,$$

(4) $$(e_\beta - e_\alpha)\,\xi^2_{\gamma\beta}(u) = -\zeta'_\beta u - e_\alpha,$$

(5) $$\xi_{\beta 0}(u)\,\xi_{\gamma\alpha}(u) = \frac{-\mathrm{p}' u}{2(\mathrm{p}\,u - e_\alpha)} = \zeta u - \zeta_\alpha u,$$

(6) $$(e_\gamma - e_\beta)\,\xi_{\alpha\beta}(u)\,\xi_{0\gamma}(u) = \zeta_\beta u - \zeta_\gamma u,$$

(7) $$\mathfrak{S}'_1(v)\,\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v) - \mathfrak{S}_1(v)\,\mathfrak{S}'_{\alpha+1}(v) = \pi\,\mathfrak{S}^2_{\alpha+1}(0)\,\mathfrak{S}_{\beta+1}(v)\,\mathfrak{S}_{\gamma+1}(v),$$

(8) $$\mathfrak{S}'_{\gamma+1}(v)\,\mathfrak{S}_{\beta+1}(v) - \mathfrak{S}_{\gamma+1}(v)\,\mathfrak{S}'_{\beta+1}(v) = \pi\,\mathfrak{S}^2_{\alpha+1}(0)\,\mathfrak{S}_1(v)\,\mathfrak{S}_{\alpha+1}(v)$$

LXIV.

(1) $$\xi_{0\gamma}(u+a) = \frac{\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}a\,\xi_{\beta\gamma}a + \xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}u}{1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2u\,\xi_{0\gamma}^2a},$$

(2) $$\xi_{\gamma 0}(u+a) = \frac{\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}a\,\xi_{\beta\gamma}a - \xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}u}{\xi_{0\gamma}^2u - \xi_{0\gamma}^2a},$$

(3) $$\xi_{\beta\gamma}(u+a) = \frac{\xi_{\beta\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}a - (e_\beta-e_\gamma)\,\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}a}{1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2u\,\xi_{0\gamma}^2a}.$$

LXV.

(1) $$\xi_{0\gamma}(u+a)\,\xi_{0\gamma}(u-a) = \frac{\xi_{0\gamma}^2u - \xi_{0\gamma}^2a}{1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2u\,\xi_{0\gamma}^2a},$$

(2) $$\xi_{\beta\gamma}(u+a)\,\xi_{\beta\gamma}(u-a) = \frac{\xi_{\beta\gamma}^2u + (e_\alpha-e_\beta)\dfrac{\xi_{0\gamma}^2a}{\xi_{\alpha\gamma}^2a}}{1+(e_\alpha-e_\gamma)\dfrac{\xi_{0\gamma}^2a}{\xi_{\alpha\gamma}^2a}\,\xi_{\beta\gamma}^2u},$$

(3) $$\left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{A}[\xi_{0\gamma}(u+a)+\xi_{0\gamma}(u-a)] = 2\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}a\,\xi_{\beta\gamma}a,\\
\mathfrak{A}[\xi_{0\gamma}(u+a)-\xi_{0\gamma}(u-a)] = 2\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}u,\\
\mathfrak{A}[\xi_{\beta\gamma}(u+a)+\xi_{\beta\gamma}(u-a)] = 2\xi_{\beta\gamma}u\,\xi_{\beta\gamma}a,\\
\mathfrak{A}[\xi_{\beta\gamma}(u+a)-\xi_{\beta\gamma}(u-a)] = -2(e_\beta-e_\gamma)\,\xi_{0\gamma}u\,\xi_{\alpha\gamma}u\,\xi_{0\gamma}a\,\xi_{\alpha\gamma}a\\
\qquad \mathfrak{A} = 1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2u\,\xi_{0\gamma}^2a.
\end{array}\right.$$

LXVI.

(1) $$\xi_{0\alpha}(u\,|\,\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \lambda\,\xi_{0\alpha}\left(\frac{u}{\lambda}\,\middle|\,\omega_1, \omega_3\right),$$

(2) $$\xi_{\alpha 0}(u\,|\,\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \frac{1}{\lambda}\,\xi_{\alpha 0}\left(\frac{u}{\lambda}\,\middle|\,\omega_1, \omega_3\right),$$

(3) $$\xi_{\beta\gamma}(u\,|\,\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \xi_{\beta\gamma}\left(\frac{u}{\lambda}\,\middle|\,\omega_1, \omega_3\right)$$

LXVII.

$$(1)\qquad \operatorname{sn}(u,k)=\sqrt{e_1-e_3}\,\xi_{03}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right),$$

$$(2)\qquad \operatorname{cn}(u,k)=\xi_{13}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right),$$

$$(3)\qquad \operatorname{dn}(u,k)=\xi_{23}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right),$$

$$(4)\qquad \operatorname{sn}\left(u\sqrt{e_1-e_3},k\right)=\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\operatorname{p}u-e_3}},$$

$$(5)\qquad \operatorname{cn}\left(u\sqrt{e_1-e_3},k\right)=\frac{\sqrt{\operatorname{p}u-e_1}}{\sqrt{\operatorname{p}u-e_3}},$$

$$(6)\qquad \operatorname{dn}\left(u\sqrt{e_1-e_3},k\right)=\frac{\sqrt{\operatorname{p}u-e_2}}{\sqrt{\operatorname{p}u-e_3}},$$

$$(7)\qquad \operatorname{p}u=e_3+\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2\left(u\sqrt{e_1-e_3}\right)}.$$

LXVIII.

$$(1)\qquad \operatorname{sn}'u=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u,$$

$$(2)\qquad \operatorname{cn}'u=-\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u,$$

$$(3)\qquad \operatorname{dn}'u=-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u$$

LXIX.

$$(1)\qquad \operatorname{sn}^2u+\operatorname{cn}^2u=1,$$

$$(2)\qquad \operatorname{dn}^2u+k^2\operatorname{sn}^2u=1$$

LXX.

(1) $$\operatorname{sn}'^2 u = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

(2) $$\operatorname{cn}'^2 u = (1 - \operatorname{cn}^2 u)(1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u),$$

(3) $$\operatorname{dn}'^2 u = (1 - \operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u - 1 + k^2).$$

LXXI.

(1) $$\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3} = K,$$

(2) $$\omega_3 \sqrt{e_1 - e_3} = i K',$$

(3) $$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0 \mid \tau),$$

(4) $$iK' = \frac{\pi\tau}{2} \vartheta_3^2(0 \mid \tau),$$

(5) $$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}},$$

(6) $$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)},$$

(7) $$\operatorname{cn} u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)},$$

(8) $$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)}.$$

Fig. 1 $z = \operatorname{sn}(u, k)$.

Fig. 2 $z = \operatorname{cn}(u, k)$

Fig. 3 $z = \operatorname{dn}(u, k)$.

Fig. 4 $s = \wp(u \mid \omega_1, \omega_3)$

LXXII.

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(-u,k) = -\operatorname{sn}(u,k), \\ \operatorname{cn}(-u,k) = \operatorname{cn}(u,k), \\ \operatorname{dn}(-u,k) = \operatorname{dn}(u,k), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn}u, \\ \operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn}u, \\ \operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn}u, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn}u, \\ \operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn}u, \\ \operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn}u, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2K+2iK') = -\operatorname{sn}u, \\ \operatorname{cn}(u+2K+2iK') = \operatorname{cn}u, \\ \operatorname{dn}(u+2K+2iK') = -\operatorname{dn}u, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+K) = \dfrac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}, \\ \operatorname{cn}(u+K) = -k'\dfrac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}, \\ \operatorname{dn}(u+K) = k'\dfrac{1}{\operatorname{dn}u}, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+iK') = \dfrac{1}{k}\dfrac{1}{\operatorname{sn}u}, \\ \operatorname{cn}(u+iK') = -\dfrac{i}{k}\dfrac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}, \\ \operatorname{dn}(u+iK') = -i\dfrac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+K+iK') = \dfrac{1}{k}\dfrac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}, \\ \operatorname{cn}(u+K+iK') = -i\dfrac{k'}{k}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{cn}u}, \\ \operatorname{dn}(u+K+iK') = ik'\dfrac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}u} \end{cases}$$

LXXIII.

(1) $$\operatorname{sn}(u+a) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a},$$

(2) $$\operatorname{cn}(u+a) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} a - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a},$$

(3) $$\operatorname{dn}(u+a) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a},$$

(4) $$\operatorname{sn}(u+a) + \operatorname{sn}(u-a) = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a},$$

(5) $$\operatorname{sn}(u+a) - \operatorname{sn}(u-a) = \frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a},$$

(6) $$\operatorname{cn}(u+a) + \operatorname{cn}(u-a) = \frac{2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a},$$

(7) $$\operatorname{cn}(u+a) - \operatorname{cn}(u-a) = \frac{-2 \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a},$$

(8) $$\operatorname{dn}(u+a) + \operatorname{dn}(u-a) = \frac{2 \operatorname{dn} u \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a},$$

(9) $$\operatorname{dn}(u+a) - \operatorname{dn}(u-a) = \frac{-2 k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a}.$$

LXXIV

(1) $$\operatorname{sn}(u+a) \operatorname{sn}(u-a) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a},$$

(2) $$\operatorname{cn}(u+a) \operatorname{cn}(u-a) = \frac{\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{dn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

(3) $$\operatorname{dn}(u+a) \operatorname{dn}(u-a) = \frac{\operatorname{dn}^2 a - k^2 \operatorname{cn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}.$$

LXXV.

(1) $$\mathrm{El}(v, \tau) = \frac{\mathfrak{I}_1(2v \mid 2\tau)}{\mathfrak{I}_4(2v \mid 2\tau)},$$

(2) $$\mathrm{El}\left(v, \frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{i} \sqrt[4]{e_2 - e_3} \sqrt[4]{e_1 - e_3}\, \xi_{03}(2u \mid \tau),$$

(3) $$\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{El}\left(v, \frac{\tau}{2}\right) = \sqrt{k}\, \mathrm{sn}(4\mathrm{K}v, k), \\ &\mathrm{sn}(u, k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\, \mathrm{El}\left(\frac{u}{4\mathrm{K}}, \frac{\tau}{2}\right), \end{aligned} \right.$$

(4) $$\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{El}\left(0, \frac{\tau}{2}\right) = 0, \qquad \mathrm{El}\left(\frac{\tau}{4}, \frac{\tau}{2}\right) = \infty, \\ &\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{\tau}{2}\right) = \sqrt{k}, \qquad \mathrm{El}\left(\frac{1+\tau}{4}, \frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \end{aligned} \right.$$

(5) $$\mathrm{El}(v + m + n\tau, \tau) = \mathrm{El}(v, \tau),$$

(6) $$\mathrm{El}\left(v + \frac{1}{2}, \tau\right) = -\,\mathrm{El}(v, \tau), \qquad \mathrm{El}\left(v + \frac{\tau}{2}, \tau\right) = \frac{1}{\mathrm{El}(v, \tau)},$$

(7) $$\rho = k + \frac{1}{k},$$

(8) $$\left\{ \begin{aligned} &x = \mathrm{El}\left(v, \frac{\tau}{2}\right), \qquad y = \mathrm{El}\left(w, \frac{\tau}{2}\right), \qquad z = \mathrm{El}\left(v + w, \frac{\tau}{2}\right), \\ &z = \frac{x\sqrt{1 - \rho y^2 + y^4} + y\sqrt{1 - \rho x^2 + x^4}}{1 - x^2 y^2}. \end{aligned} \right.$$

LXXVI.

(1) $$\mathrm{H}(x) = \mathfrak{I}_1\left(\frac{x}{2\mathrm{K}}\right),$$

(2) $$\Theta(x) = \mathfrak{I}_4\left(\frac{x}{2\mathrm{K}}\right),$$

(3) $$\mathrm{H}_1(x) = \mathfrak{I}_2\left(\frac{x}{2\mathrm{K}}\right),$$

(4) $$\Theta_1(x) = \mathfrak{I}_3\left(\frac{x}{2\mathrm{K}}\right)$$

(5) $$\mathrm{sn}\, x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)},$$

(6) $$\mathrm{cn}\, x = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)},$$

(7) $$\mathrm{dn}\, x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}$$

LXXVII.

$$
(1)\quad \left\{\begin{array}{ll}
H\,(x+2mK) = (-1)^m H(x), & \Theta\,(x+2mK) = \Theta(x), \\
H_1(x+2mK) = (-1)^m H_1(x), & \Theta_1(x+2mK) = \Theta_1(x),
\end{array}\right.
$$

$$
(2)\quad \left\{\begin{array}{ll}
H\,(x+2mi K') = (-1)^m A\, H(x), & \Theta\,(x+2mi K') = (-1)^m A\, \Theta(x), \\
H_1(x+2mi K') = A\, H_1(x), & \Theta_1(x+2mi K') = A\, \Theta_1(x), \\
\multicolumn{2}{c}{A = e^{m^2\pi \frac{K'}{K} - m\pi \frac{ix}{K}},}
\end{array}\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{\begin{array}{ll}
H(x+K) = H_1(x), & \Theta(x+K) = \Theta_1(x), \\
H_1(x+K) = -H(x), & \Theta_1(x+K) = \Theta(x),
\end{array}\right.
$$

$$
(4)\quad \left\{\begin{array}{ll}
H\,(x+iK') = iB\,\Theta(x), & \Theta\,(x+iK') = iB\,H(x), \\
H_1(x+iK') = B\,\Theta_1(x), & \Theta_1(x+iK') = B\,H_1(x), \\
\multicolumn{2}{c}{B = e^{\frac{\pi}{4}\frac{K'}{K} - \frac{\pi}{2}\frac{ix}{K}}.}
\end{array}\right.
$$

LXXVIII.

$$
(1)\qquad \zeta\left(\frac{x}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \frac{\eta_1 x}{K} + \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{H'(x)}{H(x)},
$$

$$
(2)\qquad \zeta_1\left(\frac{x}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \frac{\eta_1 x}{K} + \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{H_1'(x)}{H_1(x)},
$$

$$
(3)\qquad \zeta_2\left(\frac{x}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \frac{\eta_1 x}{K} + \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)},
$$

$$
(4)\qquad \zeta_3\left(\frac{x}{\sqrt{e_1-e_3}}\right) = \frac{\eta_1 x}{K} + \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.
$$

LXXIX.

$$
(1)\qquad Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},
$$

$$
(2)\qquad Z(x+2K) = Z(x),
$$

$$
(3)\qquad Z(x+2iK') = Z(x) - \frac{i\pi}{K},
$$

$$
(4)\qquad Z(-x) = -Z(x),
$$

(5) $Z(0) = 0,\quad Z(K) = 0,\quad Z(iK') = \infty$ (pôle simple, résidu $= 1$).

Transformation linéaire

LXXX.

(1) $$l = -\frac{\sqrt{E_2 - E_3}}{\sqrt{E_1 - E_3}} = \frac{\vartheta_2^2(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^2(0 \mid \tau)} = \varphi^4(\tau),$$

(2) $$l' = \frac{\sqrt{E_1 - E_2}}{\sqrt{E_1 - E_3}} = \frac{\vartheta_4^2(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^2(0 \mid \tau)} = \psi^4(\tau),$$

(3) $$L = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0 \mid \tau) = \Omega_1\sqrt{E_1 - F_3} = \frac{aK + biK'}{M},$$

(4) $$iL' = \tau L = \Omega_3\sqrt{E_1 - F_3} = \frac{cK + diK'}{M},$$

(5)

	l	l'	$\frac{1}{M} = \frac{\sqrt{E_1 - F_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}}$
1°	$(-1)^{\frac{cd}{2}} k$	$(-1)^{-\frac{ab}{2}} k'$	$(-1)^{\frac{a-1}{2}}$
2°	$(-1)^{\frac{cd}{2}} \frac{k}{k'}$	$(-1)^{\frac{ab}{2}} \frac{1}{k'}$	$(-1)^{\frac{d-1}{2}} k'$
3°	$(-1)^{-\frac{cd}{2}} \frac{1}{k}$	$(-1)^{-\frac{ab}{2}} \frac{k'}{k}$	$(-1)^{\frac{a-1}{2}} k$
4°	$(-1)^{\frac{cd}{2}} \frac{1}{k'}$	$(-1)^{\frac{ab}{2}} \frac{k}{k'}$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}} k'$
5°	$(-1)^{-\frac{cd}{2}} k'$	$(-1)^{\frac{ab}{2}} k$	$i(-1)^{\frac{b+1}{2}}$
6°	$(-1)^{-\frac{cd}{2}} \frac{k'}{k}$	$(-1)^{-\frac{ab}{2}} k$	$i(-1)^{\frac{c-1}{2}} k$

LXXX (FIN).

(6)

	$\mathrm{sn}(u, l)$	$\mathrm{cn}(u, l)$	$\mathrm{dn}(u, l)$
1°	$\mathrm{sn}\,u$	$\mathrm{cn}\,u$	$\mathrm{dn}\,u$
2°	$k'\dfrac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{k'}}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{k'}}$	$\dfrac{\mathrm{cn}\,\frac{u}{k'}}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{k'}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{k'}}$
3°	$k\,\mathrm{sn}\,\frac{u}{k}$	$\mathrm{dn}\,\frac{u}{k}$	$\mathrm{cn}\,\frac{u}{k}$
4°	$ik'\dfrac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{ik'}}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{ik'}}$	$\dfrac{\mathrm{dn}\,\frac{u}{ik'}}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{ik'}}$	$\dfrac{}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{ik'}}$
5°	$i\dfrac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{i}}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{i}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{i}}$	$\dfrac{\mathrm{dn}\,\frac{u}{i}}{\mathrm{cn}\,\frac{u}{i}}$
6°	$ik\dfrac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{ik}}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{ik}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{ik}}$	$\dfrac{\mathrm{cn}\,\frac{u}{ik}}{\mathrm{dn}\,\frac{u}{ik}}$

(7)

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{El}\,[(\delta - \beta\,\mathrm{T})\,v,\ \mathrm{T}] = \mathrm{El}\,[v, \tau]\; i^{-\delta\gamma+2\gamma+\delta-1}, \\ \mathrm{T} = \dfrac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \beta \textit{ pair}. \end{array}\right.$$

Transformation de Landen

LXXXI.

$$(1)\qquad \sqrt{l} = \frac{\sqrt{1-k'}}{\sqrt{1+k'}} = \frac{k}{1+k'} = \frac{1-k'}{k},$$

$$(2)\qquad \sqrt{l'} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{1+k'}},$$

$$(3)\qquad \mathrm{L} = \frac{\omega_1}{2}\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3} = \frac{\pi}{2}\,\vartheta_3^2(0\,|\,2\tau) = \frac{1+k'}{2}\,\mathrm{K} = \frac{\mathrm{K}}{2\,\mathrm{M}},$$

$$(4)\qquad \mathrm{L}' = \frac{2\tau}{i}\,\mathrm{L} = 2\,\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\,\mathrm{L} = (1+k')\mathrm{K}' = \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{M}},$$

$$(5)\qquad \mathrm{M} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_3}} = \frac{\vartheta_3^2(0\,|\,\tau)}{2\,\vartheta_3^2(0\,|\,2\tau)} = \frac{1}{1+k'}.$$

LXXXII.

$$(1)\qquad \mathrm{sn}(u,l) = (1+k')\,\frac{\mathrm{sn}\dfrac{u}{1+k'}\,\mathrm{cn}\dfrac{u}{1+k'}}{\mathrm{dn}\dfrac{u}{1+k'}},$$

$$(2)\qquad \mathrm{cn}(u,l) = \frac{1-(1+k')\,\mathrm{sn}^2\dfrac{u}{1+k'}}{\mathrm{dn}\dfrac{u}{1+k'}},$$

$$(3)\qquad \mathrm{dn}(u,l) = \frac{1-(1-k')\,\mathrm{sn}^2\dfrac{u}{1+k'}}{\mathrm{dn}\dfrac{u}{1+k'}}.$$

Transformation de Gauss.

LXXXIII.

(1) $$\sqrt{\lambda} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1+k}},$$

(2) $$\sqrt{\lambda'} = \frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k}} = \frac{k'}{1+k} = \frac{1-k}{k'},$$

(3) $$\Lambda = \omega_1\sqrt{E_1'-E_3'} = \frac{\pi}{2}\,\vartheta_3^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = (1+k)\,K = \frac{K}{M},$$

(4) $$\Lambda' = \frac{\tau}{2i}\,\Lambda = \frac{K'}{2K}\,\Lambda = \frac{1+k}{2}\,K' = \frac{K'}{2M},$$

(5) $$M = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{E_1'-E_3'}} = \frac{\vartheta_3^2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{1}{1+k}.$$

LXXXIV.

(1) $$\operatorname{sn}(u,\lambda) = (1+k)\,\frac{\operatorname{sn}\frac{u}{1+k}}{1+k\operatorname{sn}^2\frac{u}{1+k}},$$

(2) $$\operatorname{cn}(u,\lambda) = \frac{\operatorname{cn}\frac{u}{1+k}\operatorname{dn}\frac{u}{1+k}}{1+k\operatorname{sn}^2\frac{u}{1+k}},$$

(3) $$\operatorname{dn}(u,\lambda) = \frac{1-k\operatorname{sn}^2\frac{u}{1+k}}{1+k\operatorname{sn}^2\frac{u}{1+k}}.$$

Multiplication

LXXXV.

(1) $$\operatorname{sn} 2u = \frac{2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^4u},$$

(2) $$\operatorname{cn} 2u = \frac{\operatorname{cn}^2u-\operatorname{sn}^2u\operatorname{dn}^2u}{1-k^2\operatorname{sn}^4u},$$

(3) $$\operatorname{dn} 2u = \frac{\operatorname{dn}^2u-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{cn}^2u}{1-k^2\operatorname{sn}^4u}.$$

Transformation d'ordre impair.

LXXXVI.

$$a_{r,0} = \frac{2r}{n} \mathrm{K},$$

$$(1) \qquad = -\frac{\sqrt{\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_3}}{\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3}} = \frac{\mathfrak{S}_2^2(0 \mid n\tau)}{\mathfrak{S}_3^2(0 \mid n\tau)} = k^n \prod_{(r)} \xi_{12}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right),$$

$$(2) \qquad l' = \frac{\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2}}{\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3}} = \frac{\mathfrak{S}_4^2(0 \mid n\tau)}{\mathfrak{S}_3^2(0 \mid n\tau)} = k'^n \prod_{(r)} \xi_{32}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right),$$

$$(3) \qquad \sqrt{l} = \frac{\mathfrak{S}_2(0 \mid n\tau)}{\mathfrak{S}_3(0 \mid n\tau)} = (-1)^{\sum\limits_{(r)} r} (\sqrt{k})^n \prod_{(r)} \frac{\mathrm{cn}\, a_{r,0}}{\mathrm{dn}\, a_{r,0}},$$

$$(4) \qquad \sqrt{l'} = \frac{\mathfrak{S}_4(0 \mid n\tau)}{\mathfrak{S}_3(0 \mid n\tau)} = (\sqrt{k'})^n \prod_{(r)} \frac{1}{\mathrm{dn}\, a_{r,0}},$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{M} &= \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3}} = \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \frac{\xi_{03}^2\left(\frac{2r-1}{n}\omega_1\right)}{\xi_{03}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_1\right)} \\ &= \prod_{(r)} \frac{\mathrm{cn}^2 a_{r,0}}{\mathrm{sn}^2 a_{r,0}\, \mathrm{dn}^2 a_{r,0}} = \frac{\sqrt{l}}{(\sqrt{k})^n} \prod_{(r)} \frac{1}{\mathrm{sn}^2 a_{r,0}}, \end{aligned} \right.$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

$$(6) \qquad \mathrm{L} = \frac{\pi}{2} \mathfrak{S}_3^2(0 \mid n\tau) = \frac{\omega_1}{n} \sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3} = \frac{\mathrm{K}}{n\mathrm{M}},$$

$$(7) \qquad \mathrm{L}' = \frac{n\tau}{i} \mathrm{L} = \frac{1}{i} \omega_3 \sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3} = \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{M}}.$$

LXXXVII.

$$a_{r,0} = \frac{2r}{n} \mathrm{K},$$

$$(1) \qquad \mathrm{sn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{1}{\mathrm{M}} \,\mathrm{sn}\, u \prod_{(r)} \frac{\mathrm{sn}(u + a_{r,0})}{\mathrm{sn}\, a_{r,0}},$$

$$(2) \qquad \mathrm{cn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \mathrm{cn}\, u \prod_{(r)} \frac{\mathrm{cn}(u + a_{r,0})}{\mathrm{cn}\, a_{r,0}},$$

$$(3) \qquad \mathrm{dn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \mathrm{dn}\, u \prod_{(r)} \frac{\mathrm{dn}(u + a_{r,0})}{\mathrm{dn}\, a_{r,0}},$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

$$(4) \qquad \mathrm{sn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{1}{\mathrm{M}} \,\mathrm{sn}\, u \prod_{(r)} \frac{1 - \dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 a_{r,0}}}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a_{r,0} \,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$(5) \qquad \mathrm{cn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \mathrm{cn}\, u \prod_{(r)} \frac{1 - \dfrac{\mathrm{dn}^2 a_{r,0}}{\mathrm{cn}^2 a_{r,0}} \,\mathrm{sn}^2 u}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a_{r,0} \,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$(6) \qquad \mathrm{dn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \mathrm{dn}\, u \prod_{(r)} \frac{1 - k^2 \dfrac{\mathrm{cn}^2 a_{r,0}}{\mathrm{dn}^2 a_{r,0}} \,\mathrm{sn}^2 u}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a_{r,0} \,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

$$(7) \qquad \mathrm{sn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{k\mathrm{M}}{l} \sum_{(r)} \mathrm{sn}\,(u + 2a_{r,0}),$$

$$(8) \qquad \mathrm{cn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{k\mathrm{M}}{l} \sum_{(r)} \mathrm{cn}(u + 2a_{r,0}),$$

$$(9) \qquad \mathrm{dn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \mathrm{M} \sum_{(r)} \mathrm{dn}(u + 2a_{r,0}),$$

$$(r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}).$$

LXXXVIII.

$$a_{0,r} = \frac{2r}{n} K' \iota,$$

$$(1) \qquad \lambda = -\frac{\sqrt{E'_2 - E'_3}}{\sqrt{E'_1 - E'_3}} = \frac{\vartheta_2^2\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right)} = k^n \prod_{(r)} \xi_{12}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right),$$

$$(2) \qquad \lambda' = \sqrt{\frac{E'_1 - E'_2}{E'_1 - E'_3}} = \frac{\vartheta_4^2\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right)} = k'^n \prod_{(r)} \xi_{32}^2\left(\frac{2r}{n}\omega_3\right),$$

$$(3) \qquad \sqrt{\lambda} = \frac{\vartheta_2\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right)}{\vartheta_3\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right)} = (\sqrt{k})^n \prod_{(r)} \frac{\operatorname{cn} a_{0,r}}{\operatorname{dn} a_{0,r}},$$

$$(4) \qquad \sqrt{\lambda'} = \frac{\vartheta_4\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right)}{\vartheta_3\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right)} = (-1)^{\sum_{(r)} r} (\sqrt{k'})^n \prod_{(r)} \frac{1}{\operatorname{dn} a_{0,r}},$$

$$(5) \qquad M = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{E'_1 - E'_3}} = \prod_{(r)} \frac{\operatorname{cn} a_{0,r}}{\operatorname{dn} a_{0,r} \operatorname{sn} a_{0,r}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{(\sqrt{k})^n} \prod_{(r)} \frac{1}{\operatorname{sn} a_{0,r}},$$

$$(r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

$$(6) \qquad \Lambda = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2\left(0 \middle| \frac{\tau}{n}\right) = \omega_1 \sqrt{E'_1 - E'_3} = \frac{K}{M},$$

$$(7) \qquad \Lambda' = \frac{1}{n}\frac{\tau}{\iota}\Lambda = \frac{1}{\iota}\frac{\omega_3}{n}\sqrt{E'_1 - E'_3} = \frac{K'}{nM}.$$

LXXXIX.

$$a_{0,r} = \frac{2r}{n} \mathrm{K}' i,$$

$$(1) \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{1}{M} \operatorname{sn} u \prod_{(r)} \frac{\operatorname{sn}(u + a_{0,r})}{\operatorname{sn} a_{0,r}},$$

$$(2) \qquad \operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \operatorname{cn} u \prod_{(r)} \frac{\operatorname{cn}(u + a_{0,r})}{\operatorname{cn} a_{0,r}},$$

$$(3) \qquad \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \operatorname{dn} u \prod_{(r)} \frac{\operatorname{dn}(u + a_{0,r})}{\operatorname{dn}(a_{0,r})},$$

$$(r = r_1, r_2, \quad , r_{n-1}).$$

$$(4) \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{1}{M} \operatorname{sn} u \prod_{(r)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a_{0,r}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u},$$

$$(5) \qquad \operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \operatorname{cn} u \prod_{(r)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{dn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 a_{0,r}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u},$$

$$(6) \qquad \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \operatorname{dn} u \prod_{(r)} \frac{1 - \dfrac{k^2 \operatorname{cn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 a_{0,r}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{0,r} \operatorname{sn}^2 u},$$

$$\left(r = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}\right).$$

$$(7) \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{kM}{\lambda} \sum_{(r)} \operatorname{sn}(u + 2a_{0,r}),$$

$$(8) \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{kM}{\lambda} \sum_{(r)} \operatorname{cn}(u + 2a_{0,r}),$$

$$(9) \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = M \sum_{(r)} \operatorname{dn}(u + 2a_{0,r}),$$

$$(r = r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}).$$

Multiplication.

XC.

$$a_{\mu,\nu} = \frac{2\mu K + 2\nu K' i}{n},$$

$$(1)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sn}(nu) = (-1)^{\sum_{(r)} r} (\sqrt{k})^{n^2-1} \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{sn}(u + a_{\mu,\nu}),$$

$$(2)\qquad \operatorname{cn}(nu) = \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\right)^{n^2-1} \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{cn}(u + a_{\mu,\nu}),$$

$$(3)\qquad \operatorname{dn}(nu) = (-1)^{\sum_{(r)} r} \frac{1}{(\sqrt{k'})^{n^2-1}} \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{dn}(u + a_{\mu,\nu}),$$

$$\left[\begin{array}{c} (r = r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}) \\ \mu = 0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, \quad \nu = 0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} \\ \textit{en particulier } r_1 = 2, r_2 = 4, \ldots, r_{n-1} = 2(n-1) \end{array}\right]$$

$$(4)\qquad \operatorname{sn}(nu) = n \operatorname{sn} u \prod_{(\mu,\nu)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u},$$

$$(5)\qquad \operatorname{cn}(nu) = \operatorname{cn} u \prod_{(\mu,\nu)} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{dn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 a_{\mu,\nu}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u},$$

$$(6)\qquad \operatorname{dn}(nu) = \operatorname{dn} u \prod_{(\mu,\nu)} \frac{1 - \dfrac{k^2 \operatorname{cn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 a_{\mu,\nu}}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu} \operatorname{sn}^2 u},$$

$$(7)\qquad \frac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(\sqrt{k})^{n^2-1}} = \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{sn}^2 a_{\mu,\nu},$$

$$(8)\qquad \left(\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\right)^{n^2-1} = \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{cn}^2 a_{\mu,\nu},$$

$$(9)\qquad (\sqrt{k'})^{n^2-1} = \prod_{(\mu,\nu)} \operatorname{dn}^2 a_{\mu,\nu},$$

$$\left(\begin{array}{ll} \mu = 0, & \nu = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}} \\ \mu = r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{n-1}{2}}, & \nu = 0, \pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_{\frac{n-1}{2}} \end{array}\right)$$

XC (FIN)

$$(10)\qquad n\,\mathrm{sn}(nu) = \sum_{(r,s)} \mathrm{sn}(u + 2a_{r,s}),$$

$$(11)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\,\mathrm{cn}(nu) = \sum_{(r,s)} \mathrm{cn}(u + 2a_{r,s}),$$

$$(12)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\,\mathrm{dn}(nu) = \sum_{(r,s)} \mathrm{dn}(u + 2a_{r,s}),$$

$\left(\begin{array}{c} r = r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, \quad s = s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \\ \textit{en particulier} \quad r_0 = s_0 = 0, \quad r_1 = s_1 = 1, \quad \ldots, \quad r_{n-1} = s_{n-1} = n-1 \end{array}\right).$

5335

FIN DU TOME II.

10803 Paris — Impr GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55